**Pure Mathematics 理论数学,2024, 14(3), 89-99**
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143088

Hans汉斯

# $n$-边形的中心化子代数

**赵　伟**

河北地质大学数理教学部，河北　石家庄

收稿日期：2024年2月25日；录用日期：2024年3月20日；发布日期：2024年3月27日

## 摘要

**用符号$C_n$表示顶点集为$X$的$n$-边形。任意取定顶点 $x \in X$，用 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x)$ 表示关于点$x$的稳定子群($C_n$的自同构群中的子群)的中心化子代数。在本文中，我们首先通过点$x$的稳定子群在集合 $X \times X$ 上的作用构造出 $\mathcal{A}$ 的一组基。然后，给出 $\mathcal{A}$ 的三个子代数使得它们的向量空间直和恰好是 $\mathcal{A}$。最后，我们证明代数 $\mathcal{A}$ 和代数$T$相等，这里 $T := T(x)$ 表示$C_n$的关于点$x$的Terwilliger代数。**

## 关键词

**$n$-边形，中心化子代数，Terwilliger代数**

# The Centralizer Algebra of the Ordinary $n$-Cycle

**Wei Zhao**

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: Feb. 25th, 2024; accepted: Mar. 20th, 2024; published: Mar. 27th, 2024

## Abstract

**Let $C_n$ denote the Ordinary $n$-cycle with vertex set $X$. Fix any vertex $x \in X$, and let $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x)$ denote the centralizer algebra of the stabilizer of $x$ in the automorphism group of $C_n$. In this paper, we first give a basis of $\mathcal{A}$ by this stabilizer acting on $X \times X$. Moreover, we give three subalgebras of $\mathcal{A}$ such that their direct sum is just $\mathcal{A}$ as vector space of matrices. Finally, we show that the two algebras $\mathcal{A}$ and $T$ coincide, where $T := T(x)$ denotes the Terwilliger algebra of $C_n$ with respect to $x$.**

文章引用: 赵伟. $n$-边形的中心化子代数[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 89-99.
DOI: 10.12677/pm.2024.143088

**Keywords**

**Ordinary *n*-Cycle, Centralizer Algebra, Terwilliger Algebra**



## 1. 引言

设$\Gamma=(Y,E)$为一距离正则图，其顶点集为$Y$，边集为$E$。取定顶点$x\in Y$，则图$\Gamma$关于顶点$x$的稳定子群($\Gamma$的自同构群中的子群)的中心化子代数是由在点$x$的稳定子群作用下的全体不变矩阵所组成的矩阵集合，这里矩阵的行标与列标由集合$Y$中元素所标定。一般来说，图$\Gamma$的中心化子代数$\mathcal{A}$的一组基可以通过关于点$x$的稳定子群作用在集合$Y\times Y$上得到，但有时也可能是比较困难的。

Terwilliger 代数(或次成分代数)对于距离正则图的研究十分重要，并且已成为代数组合理论的重要研究内容[1] [2] [3]。我们知道代数 Terwilliger 代数是中心化子代数的子代数。一个重要的研究问题是对于哪些距离正则图其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等。事实上，对于某些距离正则图，其中心化子代数和 Terwilliger 代数已经被证明是相等的。例如，对于 Hamming 图，A. Schrijver 等人刻画了该图的中心化子代数的一组基，并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[4] [5]；对于 Johnson 图，谭莹莹等人证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[6]；对于折叠 $n$-立方图，侯利航等人刻画了该图的中心化子代数的一组基，并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[7]。基于上述文献，本文研究了 $n$-边形的中心化子代数结构：刻画了 $n$-边形的中心化子代数的一组基，并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等。本文所用的方法可以看做是上述文献[7]中研究方法的一种推广。

$n$-边形是一类经典的有 $Q$-多项式结构的距离可迁图[8]。但其中心化子代数还没有被完全刻画。在本文中，我们将刻画 $n$-边形的中心化子代数结构。为了讨论方便，用符号 $C_n$ 来表示 $n$-边形，其顶点集为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。任取两个不同的顶点 $x_p,x_q\in X$ $(1\le p,q\le n)$，它们邻接当且仅当$|p-q|=1$或$n-1$。由此可得图 $C_n$ 的距离函数：

$$\partial(x_p,x_q)=\begin{cases}|p-q| & \text{如果 } 0\le|p-q|\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\\ n-|p-q| & \text{如果 } \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\le|p-q|\le n-1.\end{cases}\quad (x_p,x_q\in X) \tag{1}$$

这里$\lfloor a\rfloor$为小于或等于 $a$ 的最大整数。由(1)可知图 $C_n$ 的直径为$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。

在本文中，取定 $x_1\in X$ 并把该点作为图 $C_n$ 的基点。设$\mathcal{A}:=\mathcal{A}(x_1)$是关于点 $x_1$ 的稳定子群($C_n$的自同构群中的子群)的中心化子代数。我们首先给出了点 $x_1$ 的稳定子群作用在集合 $X\times X$ 的所有轨道，每个轨道只含有一个或两个元素。通过在每个轨道上定义相应的 0-1 矩阵，得到了$\mathcal{A}$的一组基(见定理 3.5)。然后，我们给出$\mathcal{A}$的三个子代数并计算它们的维数(见命题 3.6~3.8)。此外，这三个子代数的向量空间直和恰好是$\mathcal{A}$ (见引理 3.9)。最后我们证明代数$\mathcal{A}$和代数 $T$ 相等并得到了 $T$ 的一组基，这里$T:=T(x_1)$表示图 $C_n$ 关于点 $x_1$ 的 Terwilliger 代数(见定理 3.11 和定理 3.12)。

为了更好地理解本文，在本节的最后给出一些主要符号的说明：

$\mathbb{C}$：复数域。

$Y$：有限非空集合。

$\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$：复数域$\mathbb{C}$上的全体$|Y|$阶方阵构成的矩阵代数，其中矩阵的行标与列标$Y$的元素标定。

$\Gamma=(Y,E)$：有限无向的，没有环与重边的连通图，$Y,E$分别为其顶点集和边集。

$\mathrm{Aut}_x(\Gamma)$：点$x$在图$\Gamma$的自同构群中的稳定子群。

$C_n$：顶点集为$X$的$n$-边形，其中$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

$\mathcal{A}:=\mathcal{A}(x_1)$：图$C_n$关于点$x_1$的中心化子代数。

$T:=T(x_1)$：图$C_n$关于点$x_1$的Terwilliger代数。

## 2. 预备知识

在本节，我们将介绍有关距离正则图和中心化子代数的一些概念和基本事实。

设是$\mathbb{C}$复数域，$Y$是一个非零有限集合。由域$\mathbb{C}$上的全体$|Y|$阶方阵构成的$\mathbb{C}$-代数记为$\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$，称为全矩阵代数，其中矩阵的行标与列标由$Y$的元素标定。

设$\Gamma=(Y,E)$为一个有限无向的，没有环与重边的连通图。用$\partial$表示图$\Gamma$的距离函数。设$D:=\max\{\partial(x,y)\mid x,y\in Y\}$，称$D$为图$\Gamma$的直径。如果对于任意的整数$i(0\le i\le D)$和任意顶点对$(x,y)$和$(u,v)$满足$\partial(x,y)=\partial(u,v)=i$，存在图$\Gamma$的自同构映射把$x$映到$u$，$y$映到$v$，那么称图$\Gamma$是距离可迁的。对于任意的$x,y\in Y$满足$\partial(x,y)=h(0\le h\le D)$，如果整数$p_{ij}^h:=|\{z\in Y\mid\partial(x,z)=i,\partial(z,y)=j\}|$与$x,y$的选取无关，那么我们称图$\Gamma$是距离正则的。注意到距离可迁图一定是距离正则图，反之不一定成立。在本节以下部分，假设图$\Gamma$是一距离正则图。

取定$x\in Y$，并把点$x$作为基点。设$\mathrm{Aut}_x(\Gamma)$为点$x$在$\Gamma$的自同构群中的稳定子群。任取$M\in\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$，$\sigma\in\mathrm{Aut}_x(\Gamma)$。如果对任意的$y,z\in Y$，有$M_{(\sigma y,\sigma z)}=M_{(y,z)}$，则称矩阵$M$在$\sigma$的作用下是不变的。由$\mathrm{Aut}_x(\Gamma)$作用下的全体不变矩阵所组成的矩阵集合称为$\mathrm{Aut}_x(\Gamma)$的中心化子代数(作为集合)。接下来，我们将介绍中心化子代数的一些子代数：Bose-Mesner代数，对偶Bose-Mesner代数以及Terwilliger代数。

对于每一个$i(0\le i\le D)$，设矩阵$A_i\in\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$，其$(x,y)$-位置元素$(A_i)_{xy}=1$，如果$\partial(x,y)=i$；$(A_i)_{xy}=0$，如果$\partial(x,y)\ne i$。易知矩阵$A_0,A_1,\cdots,A_D$张成了全矩阵代数$\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$的一个交换子代数，我们称这个代数为图$\Gamma$的Bose-Mesner代数。事实上，Bose-Mesner代数可以由邻接矩阵$A_1$生成。

取定$x\in Y$，并把点$x$作为基点。对于每一个$i(0\le i\le D)$。设$E_i^*=E_i^*(x)$为$\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$中的对角矩阵，其$(y,y)$-位置元素$(E_i^*)_{yy}=1$，如果$\partial(x,y)=i$；$(E_i^*)_{yy}=0$，如果$\partial(x,y)\ne i$。易知矩阵$E_0^*,E_1^*,\cdots,E_D^*$张成了全矩阵代数$\mathrm{Mat}_Y(\mathbb{C})$的一个交换子代数，我们称这个代数为图$\Gamma$关于点$x$的对偶Bose-Mesner代数。

图$\Gamma$的Bose-Mesner代数和对偶Bose-Mesner代数生成全矩阵代数的一个子代数，我们称这个子代数为图$\Gamma$关于点$x$的Terwilliger代数(或次成分代数)。

关于距离正则图和Terwilliger代数的更多知识，可参考文献[1] [2] [3] [8]。

## 3. $C_n$的中心化子代数

回顾第一节中$n$-边形$C_n$的定义。本节给出图$C_n(n\ge3)$的中心化子代数的一组具体的基。由于$C_n$是距离可迁图，因此可取定顶点$x_1\in X$作为基点。用符号$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$表示点$x_1$在$C_n$的自同构群中的稳定子群。易知稳定子群由集合$X$上的两个变换组成：

$$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)=\left\{(\mathbf{1}),(2\ n)(3\ n-1)\cdots\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\ n-\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\right\}. \tag{2}$$

这里$(\mathbf{1})$表示恒等变换：$x_i\mapsto x_i\,(1\le i\le n)$；$(i\ n-i+2)$表示集合$X$上的一个变换：

$$x_{n-i+2}\mapsto x_i,\quad x_{n-i+2}\mapsto x_i\ \left(2\le i\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right).$$

对于每一个有序2-元组$(x_p,x_q)\in X\times X\ (1\le p,q\le n)$，定义相应的整数3-元组$(i,j,t)$如下：

$$\rho(x_p,x_q):=(i,j,t),\ \text{这里}\ i=\partial(x_1,x_p),j=\partial(x_1,x_q),t=\partial(x_p,x_q). \tag{3}$$

注意到$0\le i,j,t\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。易知所有满足(3)的整数3-元组$(i,j,t)$构成如下集合$\mathcal{I}$：

$$\mathcal{I}=\left\{(i,j,t)\mid\rho(x_p,x_q):=(i,j,t),x_p,x_q\in X,1\le p,q\le n\right\}. \tag{4}$$

对于$\mathcal{I}$中任意整数3-元组$(i,j,t)$，由(1)，(3)可知，满足$\rho(x_p,x_q):=(i,j,t)$的$p,q$可以分为如下四种情况：

(i) 如果$p=i+1,q=j+1$，则$0\le i,j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。由(1)式可知，$t=\partial(x_{i+1},x_{j+1})=|i-j|$。

(ii) 如果$p=i+1,q=n-j+1$，则$0\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，$1\le j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$。由(1)可知，当$1\le i+j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$时，$t=\partial(x_{i+1},x_{n-j+1})=i+j$；当$\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\le i+j\le n-1$时，$t=\partial(x_{i+1},x_{n-j+1})=n-(i+j)$。

(iii) 如果$p=n-i+1,q=j+1$，则$1\le i\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$，$0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。由(1)可知，当$1\le i+j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$时，$t=\partial(x_{n-i+1},x_{j+1})=i+j$；当$\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\le i+j\le n-1$时，$t=\partial(x_{n-i+1},x_{j+1})=n-(i+j)$。

(iv) 如果$p=n-i+1,q=n-j+1$，则$1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$。由(1)可知，$t=\partial(x_{n-i+1},x_{n-j+1})=|i-j|$。

根据上述四种情况，定义$\mathcal{I}$的三个子集：

$$S_1=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid i=0,0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\text{且}\ j=0,0\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\right\}.$$

$$S_2=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid 1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\text{且}\ t=i+j,\text{如果}\ 2\le i+j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\right.$$
$$\left.t=n-(i+j),\text{如果}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\le i+j\le 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}.$$

$$S_3=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\text{且}\ j=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\right\}.$$

命题3.1 对于$n\ge 3$，我们有

$$\mathcal{I}=\begin{cases}S_1\cup S_2\cup S_3 & \text{如果}\ n\ \text{是偶数},\\ S_1\cup S_2 & \text{如果}\ n\ \text{是奇数}.\end{cases} \tag{5}$$

并且$\mathcal{I}$的基数为

$$|\mathcal{I}|=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor^2. \tag{6}$$

这里的$\lceil a\rceil$表示大于或等于 $a$ 的最小整数。

证由集合 $S_2,S_3$ 的定义易知，当 $n$ 为奇数时 $S_3\subseteq S_2$，即 $\mathcal{I}=S_1\cup S_2$。当 $n$ 为偶数时，$\mathcal{I}=S_1\cup S_2\cup S_3$。所以有(5)成立。接下来，我们计算集合 $\mathcal{I}$ 的基数。由 $S_1,S_2,S_3$ 是两两互不相交的，所以有

$$|\mathcal{I}|=\begin{cases}|S_1|+|S_2|+|S_3| & \text{如果 } n \text{ 是偶数},\\ |S_1|+|S_2| & \text{如果 } n \text{ 是奇数}.\end{cases} \tag{7}$$

通过计算可得

$$|S_1|=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\ |S_2|=2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor^2,\ |S_3|=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1. \tag{8}$$

将(8)代入到(7)中得到(6)。

对于每一个$(i,j,t)\in\mathcal{I}$，定义如下集合：

$$X_{i,j,t}=\left\{(x_p,x_q)\in X\times X\mid \rho(x_p,x_q)=(i,j,t),1\le p,q\le n\right\}. \tag{9}$$

接下来，对于每一个$(i,j,t)\in\mathcal{I}$，我们将给出集合 $X_{i,j,t}$ 的意义。为此，我们先分别给出集合 $S_1$ 的一个子集：

$$S_1'=\begin{cases}\left\{(0,0,0),\left(0,\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right),\left(\frac{n}{2},0,\frac{n}{2}\right)\right\} & \text{如果 } n \text{ 是偶数},\\ \{(0,0,0)\} & \text{如果 } n \text{ 是奇数}.\end{cases} \tag{10}$$

和 $S_3$ ($n$ 为偶数时)的一个子集：$S_3'=\left\{\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2},0\right)\right\}$。

命题 3.2 对于每一个$(i,j,t)\in\mathcal{I}$，以下(i)~(iii)成立。

(i) 对于$(i,j,t)\in S_1$，我们有

(ia) 如果$(i,j,t)\in S_1'$，则 $X_{0,0,0}=\{(x_1,x_1)\}$；当 $n$ 为偶数时，

$$X_{0,\frac{n}{2},\frac{n}{2}}=\left\{\left(x_1,x_{\frac{n}{2}+1}\right)\right\},X_{\frac{n}{2},0,\frac{n}{2}}=\left\{\left(x_{\frac{n}{2}+1},x_1\right)\right\};$$

(ib) 如果$(i,j,t)\in S-S_1'$，则

$$X_{i,j,t}=\begin{cases}\{(x_1,x_{j+1}),(x_1,x_{n-j+1})\} & \text{如果 } i=0,\\ \{(x_{i+1},x_1),(x_{n-i+1},x_1)\} & \text{如果 } j=0.\end{cases}$$

(ii) 对于$(i,j,t)\in S_2$，我们有

$$X_{i,j,t}=\begin{cases}\{(x_{i+1},x_{j+1}),(x_{n-i+1},x_{n-j+1})\} & \text{如果 } t=|i-j|,\\ \{(x_{i+1},x_{n-j+1}),(x_{n-i+1},x_{j+1})\} & \text{如果 } t=i+j \text{ 或 } t=n-(i+j).\end{cases}$$

(iii) 对于$(i,j,t)\in S_3$并且 $n$ 为偶数，我们有

(iiia) 如果$(i,j,t)\in S_3'$，则 $X_{\frac{n}{2},\frac{n}{2},0}=\left\{\left(x_{\frac{n}{2}+1},x_{\frac{n}{2}+1}\right)\right\}$。

(iiib) 如果$(i,j,t)\in S_3-S_3'$，则

$$X_{i,j,t}=\begin{cases}\left\{\left(x_{\frac{n}{2}+1},x_{j+1}\right),\left(x_{\frac{n}{2}+1},x_{j+1}\right)\right\} & \text{如果 } i=\dfrac{n}{2},\\ \left\{\left(x_{i+1},x_{\frac{n}{2}+1}\right),\left(x_{n-i+1},x_{\frac{n}{2}+1}\right)\right\} & \text{如果 } j=\dfrac{n}{2}.\end{cases}$$

证根据集合$X_{i,j,t}$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$的定义，以及上述有关$p,q$的四种情况的讨论可得。

命题 3.3 集合$X_{i,j,t}$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$是稳定子群$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$作用在集合$X\times X$上的所有轨道。

证由定义可知$X_{i,j,t}$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$构成了集合$X\times X$的一个分拆。任取$x_p,x_q\in X$，$(1\le p,q\le n)$，设$\rho(x_p,x_q)=(i,j,t)$ $(i,j,t)\in\mathcal{I}$，容易证明当映射$\sigma$取遍稳定子群$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$时，$(\sigma x_p,\sigma x_q)$能够取遍集合$X_{i,j,t}$。事实上，任取$\sigma\in\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$，$x_i\in X$ $(1\le i\le n)$。由(2)可知，变换$\sigma$为$x_i\mapsto x_i$ $(1\le i\le n)$，或者$\sigma$为$x_i\mapsto x_{n-i+2},x_{n-i+2}\mapsto x_i$ $\left(2\le i\le\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)$。基于此事实可知，对于给定的$(i,j,t)\in\mathcal{I}$，稳定子群$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$可迁地作用在集合$X_{i,j,t}$上。

定义 3.4 对于每一个$(i,j,t)\in\mathcal{I}$，定义矩阵$M_{i,j}^t\in\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$如下：

$$\left(M_{i,j}^t\right)_{x_p,x_q}=\begin{cases}1 & \text{如果}(x_p,x_q)\in X_{i,j,t},\\ 0 & \text{否则}.\end{cases}\quad (x_p,x_q\in X).$$

注意到矩阵$M_{i,j}^t$的转置为$M_{j,i}^t$，并且矩阵$M_{i,j}^t$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$是线性无关的。由命题 3.3 可知，矩阵$M_{i,j}^t$在$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$的作用下是不变的。以矩阵$M_{i,j}^t$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$为一组基张成的域$\mathbb{C}$上的线性空间记为$\mathcal{A}$。事实上，$\mathcal{A}$就是稳定子群$\mathrm{Aut}_{x_1}(C_n)$的中心化子代数。因此，$M_{i,j}^t$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$构成了代数$\mathcal{A}$的一组基。

定理 3.5 集合$\left\{M_{i,j}^t\mid(i,j,t)\in\mathcal{I}\right\}$是代数$\mathcal{A}$的一组基，其维数为

$$\dim(\mathcal{A})=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor^2.$$

证由命题 3.1 和命题 3.3 可证。

接下来，我们将给出$\mathcal{A}$的三个子代数，并计算它们的维数。为此，下面先给出$\mathcal{A}$的三个子空间：以矩阵$\left\{M_{i,j}^t\mid(i,j,t)\in\mathcal{I}_1\right\}$，如果$\mathcal{I}_1=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid i,j\text{ 都为偶数}\right\}$，为一组基张成$\mathcal{A}$的一个子空间，记为$\mathcal{A}_1$；以矩阵$\left\{M_{i,j}^t\mid(i,j,t)\in\mathcal{I}_2\right\}$，如果$\mathcal{I}_2=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid i,j\text{ 都为奇数}\right\}$，为一组基张成$\mathcal{A}$的一个子空间，记为$\mathcal{A}_2$；以矩阵$\left\{M_{i,j}^t\mid(i,j,t)\in\mathcal{I}_3\right\}$，如果$\mathcal{I}_3=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}\mid i+j\text{ 为奇数}\right\}$，为一组基张成$\mathcal{A}$的一个子空间，记为$\mathcal{A}_3$。

命题 3.6 子空间$\mathcal{A}_1$是$\mathcal{A}$的子代数，其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_1)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{8}+2 & \text{如果 } n\equiv 0\pmod 4,\\ 2\left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor^2+2\left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor+1 & \text{如果 } n\not\equiv 0\pmod 4.\end{cases}\tag{11}$$

证易知$\mathcal{A}_1$对矩阵加法，数乘，共轭转置和矩阵乘法封闭。因此$\mathcal{A}_1$是$\mathcal{A}$的子代数。为了计算$\mathcal{A}_1$的维数，只需计算$\mathcal{I}_1$的基数。定义$\mathcal{I}_1$三个的子集如下：

$$\mathcal{I}_{11}=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}_1\mid i=0,0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\text{ 且 } j=0,0\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\right\}.$$

$$\mathcal{I}_{12}=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}_1\,|\,1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\text{ 且 }t=i+j\text{ 如果 }2\le i+j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\right.$$
$$\left.t=n-(i+j)\text{ 如果}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\le i+j\le 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}.$$

$$\mathcal{I}_{13}=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}_1\,|\,i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\text{ 且 }j=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\right\}.$$

易知 $\mathcal{I}_{11}\subset S_1$， $\mathcal{I}_{12}\subset S_2$， $\mathcal{I}_{13}\subset S_3$。所以有

$$|\mathcal{I}_1|=\begin{cases}|\mathcal{I}_{11}|+|\mathcal{I}_{12}|+|\mathcal{I}_{13}| & \text{如果 }n\equiv 0(\bmod 4),\\ |\mathcal{I}_{11}|+|\mathcal{I}_{12}| & \text{如果 }n\not\equiv 0(\bmod 4).\end{cases}\tag{12}$$

通过计算得到

$$|\mathcal{I}_{11}|=\begin{cases}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1 & \text{如果 }n\equiv 0\text{ 或 }1(\bmod 4),\\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor & \text{如果 }n\equiv 2\text{ 或 }3(\bmod 4).\end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{12}|=\begin{cases}\frac{(n-4)^2}{8} & \text{如果 }n\equiv 0(\bmod 4),\\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2 & \text{如果 }n\not\equiv 0(\bmod 4).\end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{13}|=\frac{n}{2}-1,\text{ 这里的 }n\equiv 0(\bmod 4).$$

将上述结果代入(12)中得到(11)成立。

命题 3.7　子空间 $\mathcal{A}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数，其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_2)=\begin{cases}\frac{n^2+4}{8} & \text{如果 }n\equiv 2(\bmod 4),\\ 2\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor^2 & \text{如果 }n\not\equiv 2(\bmod 4).\end{cases}\tag{13}$$

证类似于命题 3.6 的证明，可知 $\mathcal{A}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数且

$$\dim(\mathcal{A}_2)=|\mathcal{I}_2|$$

为了计算 $\mathcal{I}_2$ 的基数，定义 $\mathcal{I}_2$ 两个子集如下：

$$\mathcal{I}_{21}=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}_2\,|\,1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\text{ 且 }t=i+j\text{ 如果 }2\le i+j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\right.$$
$$\left.t=n-(i+j)\text{ 如果}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\le i+j\le 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}.$$

$$\mathcal{I}_{22}=\left\{(i,j,t)\in\mathcal{I}_2\,|\,i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\text{ 且 }j=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,t=|i-j|\right\}.$$

由定义可知

$$|\mathcal{I}_2| = \begin{cases} |\mathcal{I}_{21}| + |\mathcal{I}_{22}| & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod 4, \\ |\mathcal{I}_{22}| & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

通过计算得到

$$|\mathcal{I}_{21}| = \begin{cases} \dfrac{(n-2)^2}{8} & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod 4, \\ 2\left\lfloor \dfrac{n+1}{4} \right\rfloor^2 & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod 4. \end{cases} \quad |\mathcal{I}_{22}| = \frac{n}{2}, \text{当 } n \equiv 2 \pmod 4 \text{时}.$$

因此(13)成立。

命题 3.8　子空间 $\mathcal{A}_3$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数，其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_3) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{n^2}{4} + 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod 4, \\ \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor & \text{如果 } n \equiv 1 \text{或} 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{14}$$

证类似于命题 3.6 的证明，可知 $\mathcal{A}_3$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数且

$$\dim(\mathcal{A}_3) = |\mathcal{I}_3|$$

为了计算 $\mathcal{I}_3$ 的基数，定义 $\mathcal{I}_3$ 三个子集如下：

$$\mathcal{I}_{31} = \left\{ (i,j,t) \in \mathcal{I}_3 \mid i = 0, 0 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{且 } j = 0, 0 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

$$\mathcal{I}_{32} = \left\{ (i,j,t) \in \mathcal{I}_3 \mid 1 \le i, j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \text{且 } t = i+j \text{ 如果 } 2 \le i+j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \right.$$
$$\left. t = n - (i+j) \text{ 如果} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \le i+j \le 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$$\mathcal{I}_{33} = \left\{ (i,j,t) \in \mathcal{I}_3 \mid i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{且 } j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

易知当 $n \equiv 1$ 或 $3 \pmod 4$ 时，$\mathcal{I}_{33} \subseteq \mathcal{I}_{32}$，所以我们有

$$|\mathcal{I}_3| = \begin{cases} |\mathcal{I}_{31}| + |\mathcal{I}_{32}| + |\mathcal{I}_{33}| & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 2 \pmod 4, \\ |\mathcal{I}_{31}| + |\mathcal{I}_{32}| & \text{如果 } n \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod 4. \end{cases}$$

通过计算得到

$$|\mathcal{I}_{31}| = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod 4, \\ \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \text{ 或 } 3 \pmod 4. \end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{33}| = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{n}{2} - 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{32}|=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}-n & \text{如果 } n\equiv 0(\bmod 4),\\ \left(\dfrac{n-2}{2}\right)^2 & \text{如果 } n\equiv 2(\bmod 4),\\ \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor^2 & \text{如果 } n\equiv 1(\bmod 4),\\ \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor^2-1 & \text{如果 } n\equiv 3(\bmod 4).\end{cases}$$

因此(14)成立。

引理 3.9　我们有 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3$ (向量空间直和)。

证由定理 3.5 和命题 3.6~3.8 可知，$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数，并且 $\dim(\mathcal{A})=\dim(\mathcal{A}_1)+\dim(\mathcal{A}_2)+\dim(\mathcal{A}_3)$，从而该引理成立。

对于图 $C_n$，用 $A_k$ 和 $E_k^*:=E_k^*(x_1)\left(0\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ 分别表示它的第 $k$ 个距离矩阵和第 $k$ 个对偶幂等元，用 $T:=T(x_1)$ 表示由 $A_k$ 和 $E_k^*\left(k=0,1,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ 生成的 Terwilliger 代数。

引理 3.10　以下(i)~(iii)成立。

(i)　对于每一个 $k,0\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 有

$$A_k=\sum_{\substack{(i,j,t)\in\mathcal{I}\\ t=k}}M_{i,j}^t. \tag{15}$$

(ii) 任意 $(i,j,t)\in\mathcal{I}$ 有

$$E_i^*A_tE_j^*=M_{i,j}^t. \tag{16}$$

(ii)　对于每一个 $k,0\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 有

$$E_k^*=M_{k,k}^0. \tag{17}$$

证(i)当 $0\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 时，考虑等式(15)两端矩阵的 $(x_p,x_q)$-位置元素。容易验证当 $\partial(x_p,x_q)=k$ 时，$(A_k)_{x_px_q}=\sum_{\substack{(i,j,t)\in\mathcal{I}\\ t=k}}\left(M_{i,j}^t\right)_{x_px_q}=1$，否则 $(A_k)_{x_px_q}=\sum_{\substack{(i,j,t)\in\mathcal{I}\\ t=k}}\left(M_{i,j}^t\right)_{x_px_q}=0$。

(ii) 在(15)式的等号两端左乘 $E_i^*$，右乘 $E_j^*$ 得到(16)。

(iii) 将 $i=j=k,t=|i-j|=0$ 代入(16)可得(17)。

定理 3.11 代数 $\mathcal{A}=T$。

证要证明两个代数相等，只需证明这两个代数互相包含即可。因为 $M_{i,j}^t$，$(i,j,t)\in\mathcal{I}$ 是代数 $\mathcal{A}$ 的一组基，所有矩阵 $A_k,E_k^*\left(k=0,1,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ 生成了代数 $T$。一方面，由引理 3.10 (i) (iii)可知代数 $T$ 的每一个元素都属于代数 $\mathcal{A}$，因此有 $T\subseteq\mathcal{A}$。另一方面，由引理 3.10 (ii)可知代数 $\mathcal{A}$ 的每一个元素都属于代数 $T$，因此有 $\mathcal{A}\subseteq T$。所以，代数 $\mathcal{A}=T$。

定理 3.12　集合$\left\{M_{i,j}^{t} \mid (i,j,t)\in\mathcal{I}\right\}$构成了代数 $T$ 的一组基，其维数为

$$\dim(T)=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor^2.$$

证由定理 3.5 和定理 3.11 得证。

接下来以 5-边形 $C_5$ 为例来说明本文的方法和结论。

对于 $C_5$，顶点集为 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$。由公式(2)可知图 $C_5$ 顶点 $x_1$ 的稳定子群 $\mathrm{Aut}_{x_1}(C_5)=\{(\mathbf{1}),(2\,5),(3\,4)\}$。根据(4)有

$$\mathcal{I}=\{(0,0,0),(0,1,1),(0,2,2),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,0,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,0),(2,2,1)\}.$$

由此可以得到稳定子群 $\mathrm{Aut}_{x_1}(C_5)$ 作用在集合 $X\times X$ 上的轨道

$$\begin{aligned}X_{i,j,t}=\{&(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_5),\\&(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_5)\}\end{aligned}$$

由定理 3.5 可知，图 $C_5$ 的中心化子代数 $\mathcal{A}:=\mathcal{A}(x_1)$ 的一组基为

$$M_{0,0}^{0},M_{0,1}^{1},M_{0,2}^{2},M_{1,0}^{1},M_{1,1}^{0},M_{1,1}^{2},M_{1,2}^{1},M_{1,2}^{2},M_{2,0}^{2},M_{2,1}^{1},M_{2,1}^{2},M_{2,2}^{0},M_{2,2}^{1}.$$

其维数为

$$\dim(\mathcal{A})=\left\lceil\frac{5+1}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{5-1}{2}\right\rfloor^2=13$$

相应地，由命题 3.6~3.8 可知。

$\mathcal{A}_1$ 的一组基为 $M_{0,0}^{0},M_{0,2}^{2},M_{2,0}^{2},M_{2,2}^{0},M_{2,2}^{1}$，其维数为 $\dim(\mathcal{A}_1)=2\left\lfloor\frac{5}{4}\right\rfloor^2+2\left\lfloor\frac{5}{4}\right\rfloor+1=5$。

$\mathcal{A}_2$ 的一组基为 $M_{1,1}^{0},M_{1,1}^{2}$，其维数为 $\dim(\mathcal{A}_2)=2\left\lfloor\frac{4+1}{4}\right\rfloor^2=2$。

$\mathcal{A}_3$ 的一组基为 $M_{0,1}^{1},M_{1,0}^{1},M_{1,2}^{1},M_{1,2}^{2},M_{2,1}^{1},M_{2,1}^{2}$，其维数为 $\dim(\mathcal{A}_1)=\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor=6$。

另一方面，图 $C_5$ 的所有距离矩阵为 $A_0,A_1,A_2$。所有对偶幂等元为 $E_0^*,E_1^*,E_2^*$。由引理 3.10 可知

$$\begin{aligned}&A_0=M_{0,0}^{0}+M_{1,1}^{0}+M_{2,2}^{0},\\&A_1=M_{0,1}^{1}+M_{1,0}^{1}+M_{1,2}^{1}+M_{2,1}^{1}+M_{2,2}^{1},\\&A_2=M_{0,2}^{2}+M_{1,1}^{2}+M_{1,2}^{2}+M_{2,0}^{2}+M_{2,1}^{2},\\&E_0^*=M_{0,0}^{0},E_1^*=M_{1,1}^{0},E_2^*=M_{2,2}^{0},\end{aligned}$$

并且

$$E_0^*A_0E_0^*=M_{0,0}^{0},E_0^*A_1E_1^*=M_{0,1}^{1},E_0^*A_2E_2^*=M_{0,2}^{2},E_1^*A_1E_0^*=M_{1,0}^{1},E_1^*A_0E_1^*=M_{1,1}^{0},E_1^*A_2E_1^*=M_{1,1}^{2},$$
$$E_1^*A_1E_2^*=M_{1,2}^{1},E_1^*A_2E_2^*=M_{1,2}^{2},E_2^*A_2E_0^*=M_{2,0}^{2},E_2^*A_1E_1^*=M_{2,1}^{1},E_2^*A_2E_1^*=M_{2,1}^{2},E_2^*A_0E_2^*=M_{2,2}^{0},E_2^*A_1E_2^*=M_{2,2}^{1}.$$

因此对于图 $C_5$ 有代数 $\mathcal{A}=T$，这里 $T:=T(x_1)$ 表示图 $C_5$ 关于点 $x_1$ 的 Terwilliger 代数。

## 参考文献

[1]　Terwilliger, P. (1992) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme I. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **1**,

363-388. https://doi.org/10.1023/A:1022494701663

[2] Terwilliger, P. (1993) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme II. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 73-103.

[3] Terwilliger, P. (1993) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme III. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 177-210. https://doi.org/10.1023/A:1022415825656

[4] Gijswijt, D., Schrijver, A. and Tanaka, H. (2006) New Upper Bounds for Nonbinary Codes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **13**, 1719-1731. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2006.03.010

[5] Schrijver, A. (2005) New Code Upper Bounds from the Terwilliger Algebra and Semi definite Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 2859-2866. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.851748

[6] Tan, Y., Fan, Y., Ito, T. and Liang, X. (2019) The Terwilliger Algebra of the Johnson Scheme J (N,D) Revisited from the Viewpoint of Group Representations. *European Journal of Combinatorics*, **80**, 157-171. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.02.029

[7] Hou, L., Hou, B., Kang, N. and Gao, S. (2022) The Terwilliger Algebra of the Halved N-Cube from the Viewpoint of Its Automorphism Group Action. *European Journal of Combinatorics*, **101**, 103480. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103480

[8] Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier, A. (1989) Distance-Regular Graphs. Spring, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2