Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(12), 4998-5009
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212491

具有自我保护和隔离措施的传染病模型动力学分析

郝江波，马扬军*

重庆交通大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月4日；发布日期：2023年12月13日

摘　要

该文建立并分析具有自我保护和隔离措施的传染病动力学模型，通过计算基本再生数并构造Lyapunov函数讨论了模型平衡点的稳定性。证明了当 $R_0<1$ 时，无病平衡点是全局渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点是全局渐近稳定的。利用重庆市2022年11月1日到11月25日的COVID-19病例数据进行拟合，根据数值分析得到：加强对感染者的隔离措施可以在一定程度上控制疫情，但是增强个体的自我保护措施可以更加有效地减少被感染的风险和控制疫情的传播，更利于实际应用。

关键词

COVID-19，基本再生数，Lyapunov函数，全局渐近稳定，自我保护

Dynamic Analysis of Epidemic Models with Self-Protection and Isolation Measures

Jiangbo Hao, Yangjun Ma*

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 4th, 2023; published: Dec. 13th, 2023

Abstract

The paper develops and analyzes an epidemic dynamics model with self-protection and isolation measures, and discusses the stability of the model equilibrium point by calculating the basic regeneration number and constructing a Lyapunov function. It is proved that the disease-free equi-

*通讯作者。

文章引用: 郝江波, 马扬军. 具有自我保护和隔离措施的传染病模型动力学分析[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 4998-5009. DOI: 10.12677/aam.2023.1212491

librium point is globally asymptotically stable when $R_0 < 1$; when $R_0 > 1$, the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable. Using the data of COVID-19 cases from November 1 to November 25, 2022 in Chongqing Municipality for fitting, according to the numerical analysis, we obtained that: strengthening the isolation measures for infected people can control the epidemic to a certain extent, but enhancing the self-protection measures of individuals can be more effective in reducing the risk of being infected and controlling the spread of the epidemic, which is more conducive to the practical application.

Keywords

COVID-19, Basic Reproduction Number, Lyapunov Function, Global Asymptomatically, Self-Protection

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

新型冠状病毒肺炎(COVID-19) [1]是一种传染性疾病，它通过空气飞沫和近距离接触传播，其临床表现为发热、咳嗽、乏力等症状，严重者表现为急性呼吸窘迫综合征、脓毒症休克、难以纠正的代谢性酸中毒和出凝血功能障碍，少数患者病情危重，甚至死亡。自疫情爆发以来，全球科学家们积极研究该病毒的生物学特征、流行病学特点、临床表现及治疗策略等方面的信息，以便更好地应对疫情。新冠疫苗[2]的开发对保护人民群众起到关键作用，有效地降低了病毒的危害。但是由于新冠病毒不断变异导致目前的疫苗不能完全预防感染，所以有必要采取其他措施来控制疫情的传播。

在实际防控中，由于新冠肺炎具有较强的传染性，一旦发现患者，相关部门会立刻采取措施对其进行隔离，在第一时间内对其形成轨迹进行分析，寻找密切接触者并隔离观察来控制疫情的传播，所以隔离措施是传染病防控中最重要的措施之一。文献[3]基于武汉病例数据研究了易感人群软隔离行为对COVID-19 的传播影响，通过数值模拟得到当易感人群隔离率越大或者易感人群的暴露率越小，传染人数越早到达高峰值，峰值也越低，并且疾病流行的持续时间越小，传染者最终的规模也明显变小。文献[4]考虑了一个具有无症状感染和隔离的传染病模型，通过对印度感染人数数据统计进行数值分析，得出隔离者的恢复率越大，治疗期越短，疾病消失得越快，因此特效药的研究很重要。并且得到当隔离率在0.3519~0.5411 时，无症状感染者会影响传染病的传播，隔离有症状的人对控制和消除疾病非常重要。文献[5]提出了关于疫苗接种和隔离延迟的 COVID-19 传播数学模型。根据陕西西安的实际疫情数据，进行参数值估计并通过偏秩相关系数和傅里叶振幅敏感性检验表明了无症状感染者和有症状感染者的隔离率对疫情的传播具有重大影响。文献指出在具有恒定和时变隔离率的有效资源下，最佳隔离率可以最大限度地减少累计感染人数和疾病控制成本，并有效遏制疫情的传播。

疫情流行时，个体的防控意识也是很重要的，如佩戴口罩、勤洗手等，以减少感染病毒的风险；如居家隔离、注意社交距离等，以避免病毒扩散。文献[6]介绍了关于对易感个体的自我保护、对感染个体的治疗的反应——扩散 SEIR 模型，利用数值模拟证明了行波的存在并表明自我保护和治疗可以降低传染病传播速度。文献[7]建立了一类具有隔离和不完全治疗的传染病模型，考虑了潜伏者的传染性，并将易感者分为有意识的易感者和无意识的易感者。通过数值模拟说明加大隔离和提高民众防控意识可以有效

应对疾病。文献[8]研究了媒体报道和疫苗接种对新冠肺炎传播的影响，基于上海市的数据拟合了传播率、隔离率和疫苗效率等重要参数，并分析了疫苗效率对新冠肺炎传播的影响，得出当疫苗有效性达到百分之九十时，感染者的峰值降低了约 0.007 倍。文献[9]构建了一个描述新冠肺炎在野生动物、人类种群和环境中传播的动力学模型，该模型也引入了无症状感染人群和具有自我保护意识的易感人群通过数值模拟，表明在恶性传染病爆发的早期，停止所有人类的迁徙，增加治疗强度，增强个人防护意识，尤其是提高识别无症状感染者的能力是控制疾病传播不可或缺的控制手段。

本文我们建立了一个具有自我保护且完全隔离的传染病模型，首先计算了模型的基本再生数 R_0，并且证明了当 $R_0<1$ 时，无病平衡点是全局渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点是全局渐近稳定的。利用重庆市 2022 年 11 月 1 日到 11 月 25 日的 COVID-19 病例数据，从宏观角度评估重庆市的防控策略对 COVID-19 实时传播能力的影响，通过模型的数值拟合从各个防控策略的角度来分析单个防控策略对疫情发展的影响。

2. 模型建立

受上述研究启发，建立模型时我们将易感者分为无意识的易感者和有意识的易感者，其中有意识的易感者是指疾病流行时会做好个人防护措施来减少感染的概率。当感染新冠病毒时，感染者往往伴随着发热、咳嗽、咳痰、气促、乏力等症状，同时核酸检测也呈阳性结果，我们称为确诊感染者。随着新冠病毒的不断变异，感染者中出现了没有任何临床症状但在核酸检测中呈阳性结果的感染者，这类感染者同样具有携带新冠病毒并传播的风险，我们称为无症状感染者。从 2022 年 11 月 1 日重庆市疫情发生以来，疫情传播速度快，形势严峻，主要由流行株奥密克戎 BA5.2 引起的。该毒株在传播方式与以往流行株有不同的一些特点，变异病毒奥密克戎 BA5.2，除了可以通过呼吸道飞沫传播和密切接触传播外，还可以经过气溶胶传播。这就意味着传播方式的多样性使我们防范病毒时面临更多的风险，如下水道的排污口、厕所的马桶、洗手间的洗浴盆、地漏等都是危险区域，如果同一栋楼的住户出现阳性病例，病毒可能会通过气溶胶向楼上或楼下传播。重庆属于山城，水雾多，病毒气溶胶容易悬浮在空气中传播；重庆人口众多，住宅格局与其他城市不同，老旧高楼林立密集，房子通透性不好，密闭潮湿，使得病毒容易传播扩散。政府为了有效地控制疫情，以社区或街道为单位对每个人每天进行核酸检测，会对核酸检测异常的人立刻采取隔离措施来切断传播途径并采取有效治疗直至康复。

根据上述描述建立关于 $S_1S_2EI_1I_2QR$ 的数学模型，建立如下动力学模型。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\beta_1S_1I_1-\beta_2S_1I_2-\rho S_1-dS_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}=\rho S_1-\beta_1\sigma S_2I_1-\beta_2\sigma S_2I_2-dS_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta_1S_1I_1+\beta_2S_1I_2+\beta_1\sigma S_2I_1+\beta_2\sigma S_2I_2-\tau pE-\tau(1-p)E-dE,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=\tau pE-\mu I_1-dI_1-k_1I_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=\tau(1-p)E-\mu I_2-dI_2-k_2I_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=k_1I_1+k_2I_2-\mu Q-dQ-\gamma Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma Q-dR,\end{cases}\tag{1}$$

其中 S_1、S_2、E、I_1、I_2、Q、R 分别代表无意识易感者，有意识易感者，潜伏者，确诊感染者，无症状感

染者，隔离者和康复者。其中 Λ 表示出生率，d 表示死亡率，β_1 表示与确诊感染者接触的传染率，β_2 表示与无症状感染者接触的传染率，ρ 表示无意识易感者到有意识易感者的迁入率，σ 表示有意识易感者与感染者接触率调节因子，μ 表示病死率，p 表示确诊感染者与无症状感染者的比例，k_1、k_2 分别表示确诊感染者和无症状感染者隔离速率，γ 表示治疗速率，$1/\tau$ 表示疾病平均潜伏期。

设 $N(t)$ 为 t 时刻种群中个体的总数，有 $N(t)=S_1(t)+S_2(t)+E(t)+I_1(t)+I_2(t)+Q(t)+R(t)$，通过系统(1)，可以以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=\Lambda-dS_1-dS_2-dE-dI_1-\mu I_1-dI_2-\mu I_2-dQ-\mu Q-dR\\&=\Lambda-dN-\mu\left(I_1+I_2+Q\right)\\&\le\Lambda-d\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\left(N(t)\right)\le\frac{\Lambda}{d}$$

则

$$X=\left\{\left(S_1,S_2,E,I_1,I_2,Q,R\right)\in\mathbb{R}_+^7:S_1+S_2+E+I_1+I_2+Q+R\le\frac{\Lambda}{d}\right\}$$

是模型(1)的正不变集。

3. 平衡点分析

3.1. 无病平衡点与基本再生数

令系统(1)的右端等于零，可求出无病平衡点 $P_0=\left(S_1^0,S_2^0,0,0,0,0,0\right)$，其中 $S_1^0=\dfrac{\Lambda}{\rho+d}$，$S_2^0=\dfrac{\rho\Lambda}{d\left(\rho+d\right)}$。

通过 Driessche and Watmough 的下一代矩阵演绎法[10]，我们定义基本再生数如下

$$\begin{aligned}R_0&=\frac{\left(S_1^0+\sigma S_2^0\right)\left(\beta_1\tau p\left(\mu+d+k_2\right)+\beta_2\tau\left(1-p\right)\left(\mu+d+k_1\right)\right)}{\left(\tau+d\right)\left(\mu+d+k_1\right)\left(\mu+d+k_2\right)}\\&=\frac{\left(S_1^0+\sigma S_2^0\right)\left(\beta_1\tau pB+\beta_2\tau\left(1-p\right)A\right)}{\left(\tau+d\right)AB}\end{aligned}$$

其中常数 $A=\mu+d+k_1$，$B=\mu+d+k_2$。

3.2. 地方病平衡点的存在性

在证明地方病平衡点存在性时，由于本文模型维数较多，求解模型的地方病平衡点较为困难，所以我们将构造关于 I_1 的函数，证明该函数在区间 $\left(0,\dfrac{\Lambda}{d}\right)$ 上是一个单调递减的函数且只有唯一正根，即证明了该系统存在一个地方病平衡点。

定理 1 当 $R_0>1$ 时，系统(1)存在一个地方病平衡点 P^*。

证明 令系统(1)右边的部分等于零，可得到

$$S_1=\frac{\Lambda}{\beta_1I_1+\beta_2I_2+\rho+d},S_2=\frac{\rho S_1}{\sigma\beta_1I_1+\sigma\beta_2I_2+d},E=\frac{\left(\mu+d+k_1\right)I_1}{\tau p},I_2=\frac{\tau\left(1-p\right)E}{\mu+d+k_2}$$

则

$$S_1+\sigma S_2=\frac{\Lambda}{\beta_1 I_1+\beta_2 I_2+\rho+d}+\frac{\sigma\rho S_1}{\sigma\beta_1 I_1+\sigma\beta_2 I_2+d}$$
$$=\frac{\Lambda\tau pB}{MI_1+(\rho+d)\tau pB}\frac{\sigma MI_1+(d+\sigma\rho)\tau pB}{\sigma MI_1+d\tau pB}$$

通过系统(1)第三个方程可以推出

$$S_1+\sigma S_2=\frac{(\tau+d)E}{\beta_1 I_1+\beta_2 I_2}=\frac{(\tau+d)AB}{M},$$

其中 $M=\beta_1\tau pB+\beta_2\tau(1-p)A$，

令 $F(I_1)=\frac{\tau pB}{MI_1+(\rho+d)\tau pB}\frac{\sigma MI_1+(d+\sigma\rho)\tau pB}{\sigma MI_1+d\tau pB}-\frac{(\tau+d)AB}{M\Lambda}$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}F(I_1)}{\mathrm{d}t}=\frac{F_1(I_1)}{\left[MI_1+(\rho+d)\tau pB\right]^2(\sigma MI_1+d\tau pB)^2}$$

其中

$$F_1(I_1)=-\tau pB\left[\sigma^2M^3(I_1)^2+2\sigma M^2(d+\sigma\rho)\tau pBI_1+\left[(d+\sigma\rho)Md+\sigma^2M\rho(\rho+d)\right](\tau pB)^2\right]<0$$

故 $\frac{\mathrm{d}F(I_1)}{\mathrm{d}t}<0$，所以 $F(I_1)$ 是关于 $I_1>0$ 的单调递减函数。

又因为

$$F(0)=\frac{\tau pB}{(\rho+d)\tau pB}\frac{(d+\sigma\rho)\tau pB}{d\tau pB}-\frac{(\tau+d)AB}{M\Lambda}=\frac{(\tau+d)AB}{M\Lambda}(R_0-1)$$

且 $\left[MI_1+(\rho+d)\tau pB\right](\sigma MI_1+d\tau pB)>MI_1\left[\sigma MI_1+(d+\sigma\rho)\tau pB\right]$，

可得

$$F\left(\frac{\Lambda}{d}\right)<\frac{\tau pBd}{\Lambda M}-\frac{(\tau+d)AB}{\Lambda M}\le\frac{\tau Bd}{\Lambda M}-\frac{(\tau+d)AB}{\Lambda M}<0$$

根据函数 $F(I_1)$ 的单调性可得，当 $R_0>1$ 时，方程在区间 $\left(0,\frac{\Lambda}{d}\right)$ 上存在唯一正根；当 $R_0\le 1$ 时，方程在区间 $\left(0,\frac{\Lambda}{d}\right)$ 上不存在正根。

因此，当 $R_0>1$ 时，系统(1)总存在地方病平衡点 $P^*=\left(S_1^*,S_2^*,E^*,I_1^*,I_2^*,Q^*,R^*\right)$。

4. 平衡点的全局稳定性

4.1. 无病平衡点的全局稳定性

定理 2 当 $R_0<1$，系统(1)的无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V=\frac{E}{\tau+d}+\frac{\left(\beta_1S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0\right)I_1}{(\tau+d)(\mu+d+k_1)}+\frac{\left(\beta_2S_1^0+\beta_2\sigma S_2^0\right)I_2}{(\tau+d)(\mu+d+k_2)}$$

其沿系统(1)的导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\tau+d}\left[\beta_1 S_1 I_1+\beta_2 S_1 I_2+\beta_1\sigma S_2 I_1+\beta_2\sigma S_2 I_2-\tau pE-\tau(1-p)E-dE\right] \\
&\quad+\frac{\beta_1 S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0}{(\tau+d)(\mu+d+k_1)}(\tau pE-\mu I_1-dI_1-k_1 I_1) \\
&\quad+\frac{\beta_1 S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0}{(\tau+d)(\mu+d+k_2)}\left[\tau(1-p)E-\mu I_2-dI_2-k_2 I_2\right] \\
&\le \frac{\beta_1 S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0}{\tau+d}I_1+\frac{\beta_2 S_1^0+\beta_2\sigma S_2^0}{\tau+d}I_2-E+\frac{\tau p\left(\beta_1 S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0\right)}{(\tau+d)(\mu+d+k_1)}E \\
&\quad-\frac{\beta_1 S_1^0+\beta_1\sigma S_2^0}{\tau+d}I_1+\frac{\tau(1-p)\left(\beta_1 S_1^0+\beta_2\sigma S_2^0\right)}{(\tau+d)(\mu+d+k_2)}E-\frac{\beta_2 S_1^0+\beta_2\sigma S_2^0}{\tau+d}I_2 \\
&= E(R_0-1)
\end{aligned}
$$

因此，当 $R_0<1$ 是，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$。由 LaSalle 不变理论及极限方程理论[11]知，无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的。

4.2. 地方病平衡点的全局稳定性

定理 3 当 $R_0>1$ 时，系统(1)的地方病平衡点 $P^*\left(S_1^*,S_2^*,E^*,I_1^*,I_2^*,Q^*,R^*\right)$ 是全局渐近稳定的。

证明 设

$$
x=\frac{S_1}{S_1^*},\ y=\frac{S_2}{S_2^*},\ e=\frac{E}{E^*},\ a=\frac{I_1}{I_1^*},\ b=\frac{I_2}{I_2^*}
$$

构造 Lyapunov 函数

$$
W(x,y,z,e,a,b)=S_1^*(x-1-\ln x)+S_2^*(y-1-\ln y)+E^*(e-1-\ln e)+nI_1^*(a-1-\ln a)+tI_2^*(b-1-\ln b)
$$

其沿系统(1)的导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}+\left(1-\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}+\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+n\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+t\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)\left[\Lambda(1-x)-\beta_1 I_1^* S_1^*(a-1)x-\beta_2 I_2^* S_1^*(b-1)x\right] \\
&\quad+\left(1-\frac{1}{y}\right)\left[\rho S_1^*(x-y)-\beta_1\sigma I_1^* S_2^*(a-1)y-\beta_2\sigma I_2^* S_2^*(b-1)y\right] \\
&\quad+\left(1-\frac{1}{e}\right)\left[\beta_1 I_1^* S_1^*(xa-e)+\beta_2 I_2^* S_1^*(xb-e)\right. \\
&\quad\left.+\beta_1\sigma I_1^* S_2^*(ya-e)+\beta_2\sigma I_2^* S_2^*(yb-e)\right] \\
&\quad+n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left[\tau pE^*(e-a)\right]+t\left(1-\frac{1}{b}\right)\left[\tau(1-p)E^*(e-b)\right] \\
&= \beta_1 S_1^* I_1^*\left(3-\frac{1}{x}-\frac{xa}{e}-\frac{e}{a}\right)+\beta_2 S_1^* I_2^*\left(3-\frac{1}{x}-\frac{xb}{e}-\frac{e}{b}\right) \\
&\quad+\beta_1\sigma S_2^* I_1^*\left(4-\frac{1}{x}-\frac{ya}{e}-\frac{e}{a}-\frac{x}{y}\right)+\beta_2\sigma S_2^* I_2^*\left(4-\frac{1}{x}-\frac{yb}{e}-\frac{e}{b}-\frac{x}{y}\right) \\
&\quad+dS_1^*\left(2-x-\frac{1}{x}\right)+dS_2^*\left(3-y-\frac{1}{x}-\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $n=\dfrac{\beta_1 S_1^* I_1^* + \beta_1 \sigma S_2^* I_1^*}{\tau p E^*} t = \dfrac{\beta_2 S_1^* I_2^* + \beta_2 \sigma S_2^* I_2^*}{\tau (1-p) E^*}$。

根据几何平均数和算术平均数之间的关系，有 $2-x-\frac{1}{x}\le 0$，$3-\frac{1}{x}-\frac{xa}{e}-\frac{e}{a}\le 0$，$3-\frac{1}{x}-\frac{xb}{e}-\frac{e}{b}\le 0$，$4-\frac{1}{x}-\frac{ya}{e}-\frac{e}{a}-\frac{x}{y}\le 0$，$4-\frac{1}{x}-\frac{yb}{e}-\frac{e}{b}-\frac{x}{y}\le 0$，$3-y-\frac{1}{x}-\frac{x}{y}\le 0$，因此 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\le 0$，并且当且仅当 $x=y=1$，$a=b=e$，有 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0$。由 LaSalle 不变理论及极限方程理论[11]知，地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的。

5. 数据分析

本文从重庆市卫生健康委员会得到了 2022 年 11 月和 12 月重庆市新报告的新型冠状肺炎病例数。重庆市疾控中心通过对感染者进行病毒基因测序，结果显示重庆本次的疫情主要是由奥密克戎变异株引起。由于后期全国疫情管控放开，各地不再每日统计疫情数据，为保证数据分析的合理性，本文采用了 2022 年 11 月 1 至 11 月 25 日的数据。奥密克戎变异株病毒的潜伏期大概是 3.86 天；无症状感染者病例数大概是确诊感染者病例数 10 倍。由于本次疫情主要发生在重庆市的主城区，所以本文采用主城区所统计的数据。总人数 $N=S_1(0)+S_2(0)=10343100$，每天新增人口数 310 人左右，自然死亡率为 2.403×10^{-5} (见 http://www.cq.gov.cn/链接)。本次疫情中未有人因病逝世，所以病死率为 0；隔离后通过治疗大概 7 天就可以康复(见 https://wsjkw.cq.gov.cn/链接)。基于数学模型和具体数据，使用最小二乘法将模型与实际数据和参数进行拟合，表 1 和表 2 中估计了参数 $\beta_1,\beta_2,\sigma,\rho,k_1,k_2$ 和初始值 $S_1(0),S_2(0),E(0)$。图 1 显示了模拟结果与实际数据一致，验证了模型的准确性。

Table 1. The description of each parameter
表 1. 各参数的意义

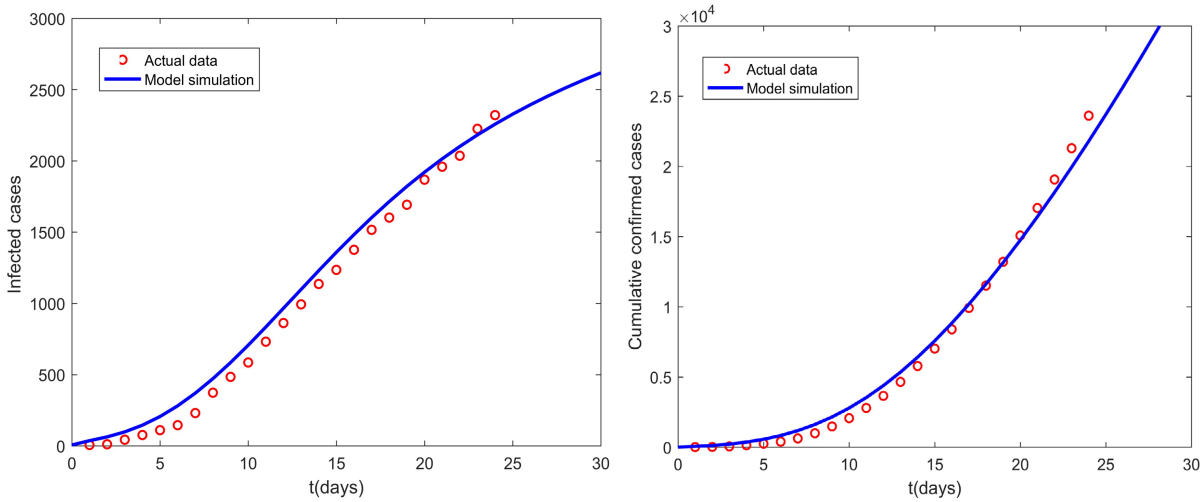
参数	取值	来源	参数	取值	来源
Λ	310	Data	d	2.403×10^{-5}	Data
β_1	2.105×10^{-6}	Fitted	β_2	3.050×10^{-7}	Fitted
σ	0.14	Estimated	ρ	0.1620	Fitted
μ	0	Data	p	0.12	Data
k_1	0.8	Estimated	k_2	0.6	Estimated
γ	0.1429	Data	$1/\tau$	1/3.86	Data

Table 2. Initial values in Chongqing
表 2. 初始值

初值	取值	来源
$S_1(0)$	7,240,170	Estimated
$S_2(0)$	3,102,930	Estimated
$E(0)$	1500	Fitted
$I_1(0)$	6	Data

Continued

$I_2(0)$	0	Data
$Q(0)$	0	Data
$R(0)$	0	Data

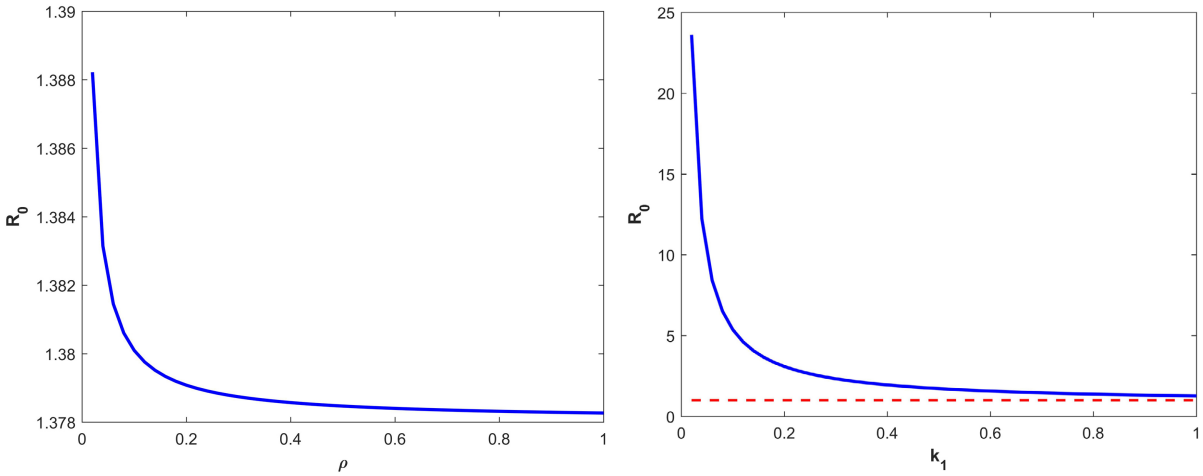


(a) (b)

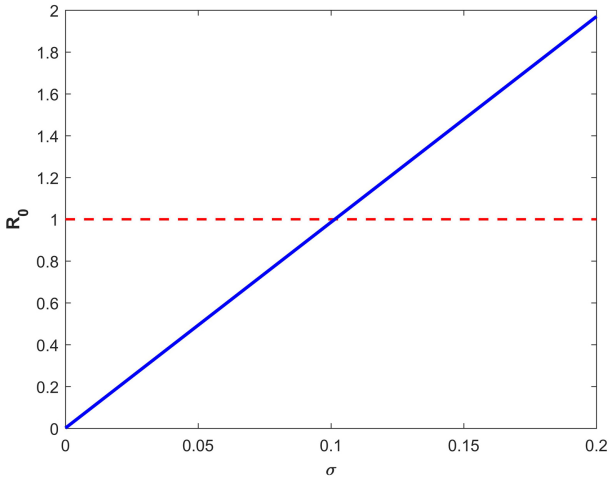
Figure 1. The fitting results of the model (1) with real data from November 1, 2022 to November 25, 2022 in Chongqing. (a) Infected cases; (b) The cumulative number of infected cases

图 1. 模型(1)与重庆 2022 年 11 月 1 日至 11 月 25 日实际数据的拟合结果。(a) 确诊人数；(b) 累计确诊病例数

如果某地区长期内没有出现感染者，民众会减少自我保护措施，对疫情放松警惕，缺少有效的自我保护措施；一旦出现感染者，人们会通过媒体途径得到信息，便又会加强防控意识，从无意识易感者转换为有意识易感者。由 Matlab 软件我们可以画出迁入率 ρ 与基本再生数 R_0 的曲线如图 2(a)。可以看出，随着迁入率 ρ 的增加，基本再生数 R_0 减小，但效果并不明显，所以当疫情爆发时仅具有自我保护的意识并不能有效地控制疫情，应当采取有效的防控措施。



(a) (b)

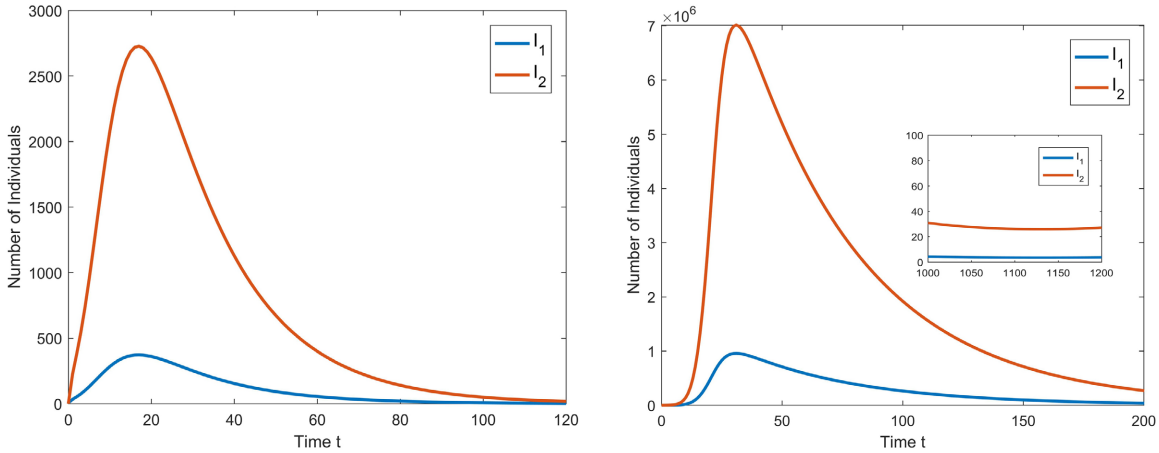


(c)

Figure 2. (a) The relationship between the parameter ρ and R_0; (b) The relationship between the parameter k_1 and R_0; (c) The relationship between the parameter σ and R_0

图 2. (a) ρ 与 R_0 的关系；(b) k_1 与 R_0 的关系；(c) σ 与 R_0 的关系

图 2(b)显示了隔离率 k_1 与基本再生数 R_0 之间是负相关的，随着隔离率 k_1 增大，基本再生数减小，但是效果并不显著。这是因为在本次疫情中，确诊感染者(I_1)和无症状感染者(I_2)都具有传染性并且两者都可以通过核酸抗原检测出，所以应该对两者都进行隔离，这样才能更有效地控制疫情。对于隔离率 k_1 和 k_2，我们选择了两个不同的值作为比较，以表明对感染者采取隔离措施以控制疾病传播的重要性。图 3 分别是当 $k_1 = k_2 = 0.99$ 和 $k_1 = k_2 = 0.02$ 时系统(1)的演变。当 $k_1 = k_2 = 0.99$ 时，基本再生数 $R_0 = 0.9512 < 1$，无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的(见图 3(a))；当 $k_1 = k_2 = 0.02$ 时，基本再生数 $R_0 = 47.0322 > 1$，无病平衡点是全局渐近稳定的，地方病平衡点是全局渐近稳定的(见图 3(b))。



(a) $k_1 = k_2 = 0.99$， $R_0 = 0.9512 < 1$　　(b) $k_1 = k_2 = 0.02$， $R_0 = 47.0322 > 1$

Figure 3. The evolution of system

图 3. 系统的演变

图 2(c)显示了有意识易感者与感染者接触率调节因子 σ 与基本再生数 R_0 的关系，我们可以发现 R_0 与 σ 正相关。接下来我们就分析 σ 对新冠肺炎的影响。图 4 和图 5 分别显示了当 $R_0 < 1$ 和 $R_0 > 1$ 时，不同的接触率调节因子下的确诊感染人数、隔离人数和累计感染人数。当 $R_0 < 1$ 时，调节因子越小，感染者

越少，累计感染者越少；当 $R_0 > 1$ 时，调节因子越大，感染者和隔离者就越多。这就说明，当调节因子越小，即个人的自我防护措施越有效，被传染的概率就越小，可以有效地控制疫情的传播。

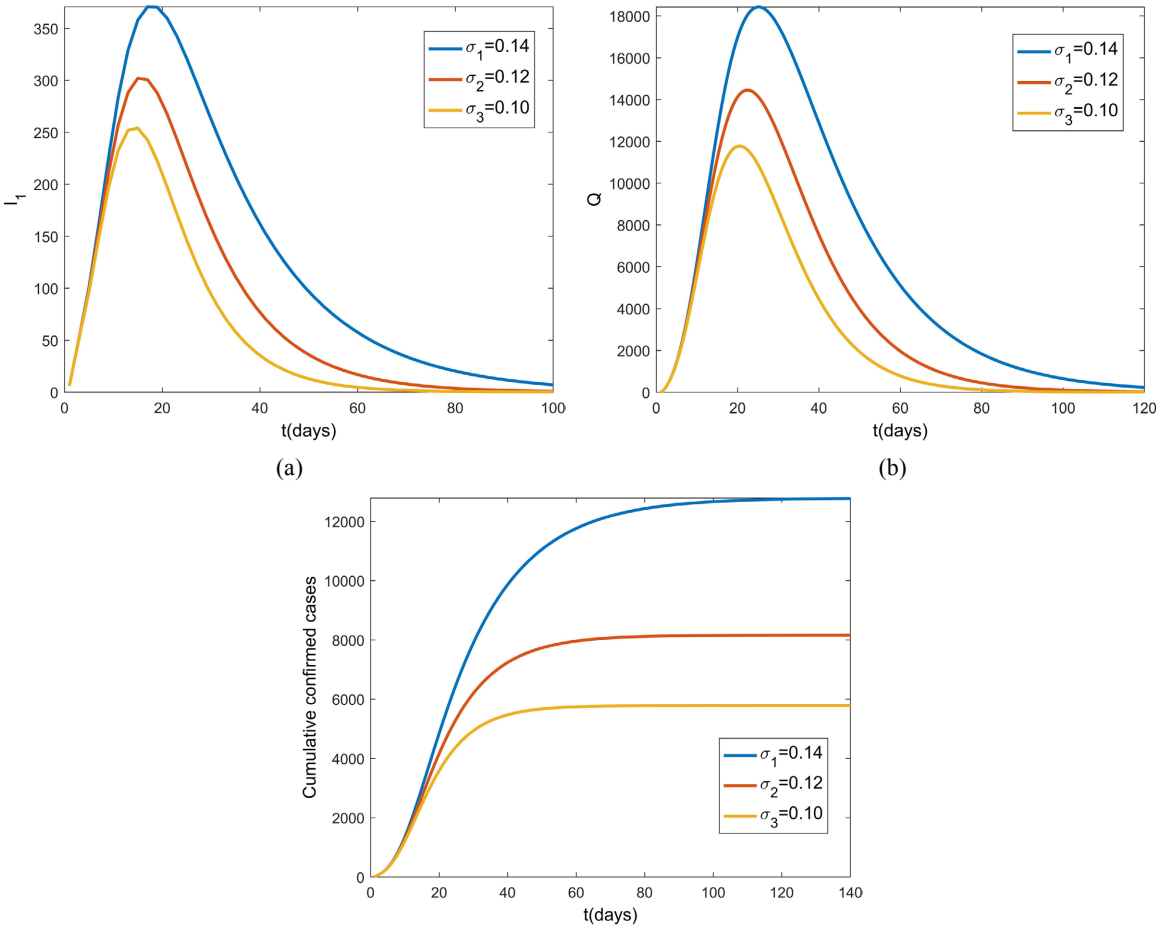
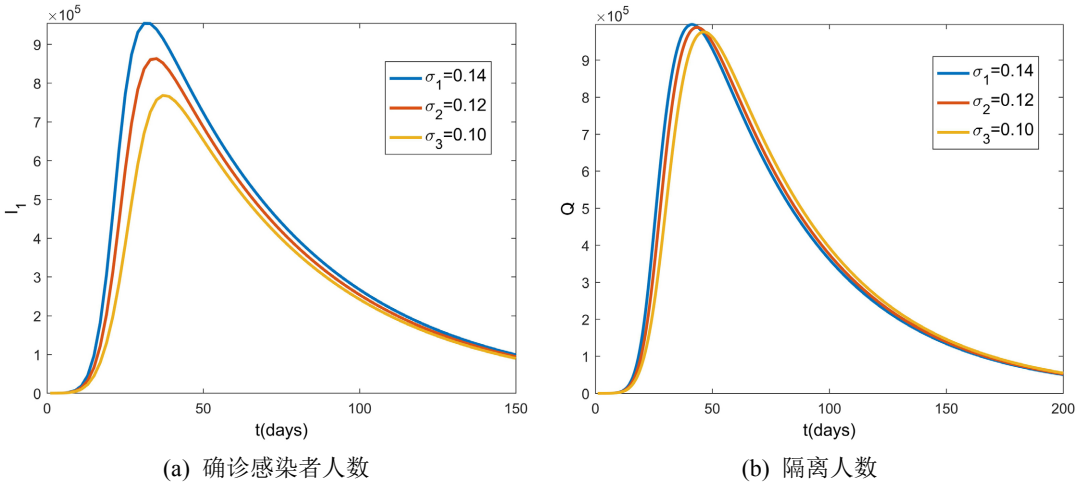
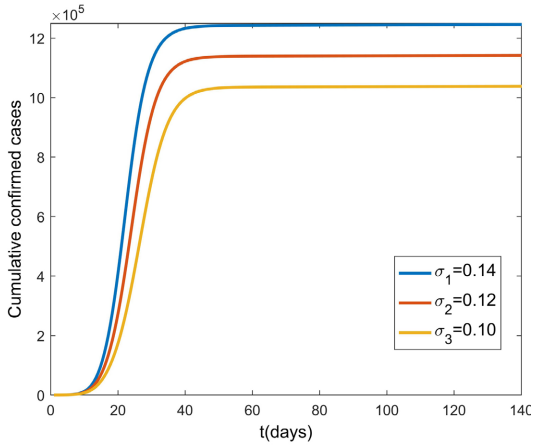


Figure 4. When $k_1 = k_2 = 0.99$, $R_0 = 0.9512 < 1$. (a) Number of infected; (b) Number of quarantine; (c) Cumulative number of confirmed infections

图 4. 当 $k_1 = k_2 = 0.99$ 时，$R_0 = 0.9512 < 1$。(a) 确诊感染者人数；(b) 隔离人数；(c) 累计确诊感染人数



(a) 确诊感染者人数　　(b) 隔离人数



(c) 累计感染人数

Figure 5. When $k_1 = k_2 = 0.02$, $R_0 = 47.0322 > 1$. (a) Number of infected; (b) Number of quarantine; (c) Cumulative number of confirmed infections

图 5. 当 $k_1 = k_2 = 0.02$ 时，$R_0 = 47.0322 > 1$。(a) 确诊感染者人数；(b) 隔离人数；(c) 累计确诊感染人数

6. 结论

本文主要讨论了具有自我保护和隔离措施的新冠肺炎传染病模型。通过计算模型的基本再生数和平衡点，证明了当 $R_0 < 1$，无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的；当 $R_0 > 1$ 时，地方病平衡点是全局渐近稳定的。通过数值分析可以发现同时加强对确诊感染者和无症状感染者的隔离，可以有效地控制疫情传播。但是实际情况复杂多变，无法有效地落实隔离措施。通过分析调节因子 σ 可以明显地发现有效的自我保护措施，例如正确地佩戴口罩、减少到人群密集场所活动、保持良好的卫生习惯等措施，可以更有效地减少被感染的风险，更加迅速地遏制疫情；同时可以更利于实际应用，是一个有效且低成本的防控措施。

基金项目

重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJQN202100709)。

参考文献

[1] Cohen, J. and Normile, D. (2020) New SARS-Like Virus in China Triggers Alarm. *American Association for the Advancement of Science*, **367**, 234-235. https://doi.org/10.1126/science.367.6475.234

[2] Thomas, S.J., Moreira Jr., E.D., Kitchin, N., *et al*. (2021) Safety and Efficacy of the BNT162b2 mRNA Covid-19 Vaccine through 6 Months. *New England Journal of Medicine*, **385**, 1761-1773. https://doi.org/10.1056/NEJMoa2110345

[3] 张菊平, 李云, 姚美萍, 等. 武汉市 COVID-19 疫情与易感人群软隔离强度关系分析[J]. 应用数学学报, 2020, **43**(2): 162-173.

[4] Yuan, R., Ma, Y., Shen, C., *et al*. (2021) Global Dynamics of COVID-19 Epidemic Model with Recessive Infection and Isolation. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **18**, 1833-1844. https://doi.org/10.3934/mbe.2021095

[5] Song, H., Wang, R., Liu, S., *et al*. (2022) Global Stability and Optimal Control for a COVID-19 Model with Vaccination and Isolation Delays. *Results in physics*, **42**, Article ID: 106011. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.106011

[6] Huo, H.-F., Hu, S.-K. and Xiang, H. (2021) Traveling Wave Solution for a Diffusion SEIR Epidemic Model with Self-Protection and Treatment. *Electronic Research Archive*, **29**, 2325-2358. https://doi.org/10.3934/era.2020118

[7] 丰利香, 王德芬. 具有隔离和不完全治疗的传染病模型的全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(4): 1235-1248.

[8] Wang, X., Liang, Y., Li, J., *et al*. (2023) Modeling COVID-19 Transmission Dynamics Incorporating Media Coverage and Vaccination. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 10392-10403. https://doi.org/10.3934/mbe.2023456

[9] Hu, L. and Nie, L. (2021) Dynamic Modeling and Analysis of COVID-19 in Different Transmission Process and Control Strategies. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 1409-1422. https://doi.org/10.1002/mma.6839

[10] Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6

[11] La Salle, J.P. (1994) The Stability of Dynamical Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.