Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(12), 1971-1978**
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.812226

Hans汉斯

Existence of Nonoscillatory Solutions of Two-Dimensional Time Scale Systems

Ting Li, Feng Chen

School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 670238988@qq.com

Received: Nov. 15th, 2019; accepted: Dec. 3rd, 2019; published: Dec. 10th, 2019

Abstract

The study of time-scale theory combines the theory of differential equations with the theory of difference equations effectively, and the results obtained are more extensively used than those of differential equations and difference equations. In this paper, we employ Schauder's fixed point theorem, Knaster's fixed point theorem and double improper integrals to establish the existence of nonoscillatory solutions to the two-dimensional time scale system composed of first-order dynamic equations, and verify the main obtained results through some examples.

Keywords

Two-Dimensional System, Nonoscillatory Solutions, Time Scales, Existence

时标上一类二维动力系统的非振荡解的存在性

李　婷，陈　凤

广西大学数学与信息科学学院，广西　南宁
Email: 670238988@qq.com

收稿日期：2019年11月15日；录用日期：2019年12月3日；发布日期：2019年12月10日

摘　要

时标理论的研究是将微分方程理论和差分方程理论有效的结合起来,且其结果比微分方程和差分方程理论应用更为广泛。本文通过Schauder不动点定理，Knaster不动点定理以及双重广义积分来证明时标上一类由一阶动力学方程构成的二维动力系统非振荡解的存在性问题，并通过一些实例来验证所得到的主要结果。

文章引用: 李婷, 陈凤. 时标上一类二维动力系统的非振荡解的存在性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1971-1978.
DOI: 10.12677/aam.2019.812226

关键词

二维动力系统，非振荡解，时标，存在性

1. 引言

在本文中，研究时标上由一阶动力学方程构成的二维动力系统

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, y(t)) \\ y^{\Delta}(t) = g(t, x(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

的非振荡解的存在性，其中 $f(t,u)$ 和 $g(t,u)$ 是关于 u 的非减函数且对 $t \in \mathbb{T}$，$u \neq 0$，有 $uf(t,u) > 0$，$ug(t,u) > 0$。本文假设时标 $\mathbb{T}$ 无上界。文中出现的 $t \geq t_0$ 等价于 $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} := [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$。当 x, y 均为非振荡的，即终于正或终于负，则称 (x, y) 为非振荡解，反之为振荡解。

本文的想法来源于 W. T. Li [1]的二维非线性微分动力系统

$$\begin{cases} x'(t) = a(t) f(y(t)) \\ y'(t) = b(t) g(x(t)) \end{cases} \tag{1.2}$$

的非振荡解的存在性和 Özkan Öztürk [2]的时标上的三维动力系统

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = a(t) f(y(t)) \\ y^{\Delta}(t) = b(t) g(z(t)) \\ z^{\Delta}(t) = c(t) h(x(t)) \end{cases} \tag{1.3}$$

的非振荡解的存在性。

在本文中，回顾了一些与时标相关的文章以及概念，更多细节可以参阅文献[3]-[8]。

2. 几个引理

本文将动力系统(1.1)的所有非振荡解构成的集合设为 S,则(1.1)的所有非振荡解属于下列两种情况之一：

$$S^{+} := \left\{ (x, y) \in S : \lim_{t \to \infty} x(t) y(t) > 0 \right\}$$

$$S^{-} := \left\{ (x, y) \in S : \lim_{t \to \infty} x(t) y(t) < 0 \right\}$$

引理 2.1：若 (x, y) 是动力系统(1.1)的一个非振荡解，本文只考虑 S^{+} 这种情况，假设 x 是终于正的即 $\lim_{t \to \infty} x(t) > 0$ (x 是终于负的证明与之类似)。

非振荡解其中 x 是终于正的，则 x,y 均为终于正的单调递增函数且该解属于下列四种情况之一：

$$S^{+}_{B,B} := \left\{ (x, y) \in S^{+} : \lim_{t \to \infty} x(t) = c, \lim_{t \to \infty} y(t) = d \right\}$$

$$S^{+}_{B,\infty} := \left\{ (x, y) \in S^{+} : \lim_{t \to \infty} x(t) = c, \lim_{t \to \infty} y(t) = \infty \right\}$$

$$S^+_{\infty,B} := \left\{(x,y)\in S^+ : \lim_{t\to\infty} x(t)=\infty, \lim_{t\to\infty} y(t)=d\right\}$$

$$S^+_{\infty,\infty} := \left\{(x,y)\in S^+ : \lim_{t\to\infty} x(t)=\infty, \lim_{t\to\infty} y(t)=\infty\right\}$$

引理 2.2 [9]：若 X 为巴拿赫空间，Y 是 X 的非空有界凸闭子集，且存在一个紧算子 $F:Y\to Y$，则 F 在 X 上有一个不动点，称该不动点为 Schauder 不动点。

引理 2.3 [10]：若 $(Y,\le)$ 为完全格，且存在一个保序算子 $F:Y\to Y$，则 F 在 Y 上有一个不动点，称该不动点为 Knaster 不动点。

3. 主要结论

定理 3.1 $S^+_{B,B}\ne\varnothing$ 当且仅当存在 $L>0$，$K_1>0$，$K_2>0$ 使得

$$\int_{t_0}^{\infty} f\left(s, L+\int_{t_0}^{s} g(u,K_1)\Delta u\right)\Delta s<\infty \tag{3.1}$$

和

$$\int_{t_0}^{\infty} g(s,K_2)\Delta s<\infty \tag{3.2}$$

成立。

证明：先证必要性，假设 $S^+_{B,B}\ne\varnothing$ 即存在 $(x,y)\in S^+_{B,B}$，则 x,y 均为终于正的并且单调递增，当 $t\to\infty$ 时，有 $x\to c$，$y\to d$，其中 $0<c,d<\infty$。故存在 $t_1\ge t_0$，使得当 $t\ge t_1$ 时，有 $\frac{c}{2}\le x(t)\le c$ 成立。

由 $g(t,u)$ 关于 u 的单调性和对(1.1)的第二个方程由 t_1 到 t 进行积分，得

$$y(t)=y(t_1)+\int_{t_1}^{t} g(s,x(s))\Delta s\ge y(t_1)+\int_{t_1}^{t} g\left(s,\frac{c}{2}\right)\Delta s \tag{3.3}$$

当 $t\to\infty$ 时，可得

$$\int_{t_1}^{\infty} g\left(s,\frac{c}{2}\right)\Delta s\le d-y(t_1)<\infty$$

对(1.1)的第一个方程由 t_1 到 t 进行积分并利用(3.3)式，可得

$$c\ge x(t)\ge x(t_1)+\int_{t_1}^{t} f\left(s, y(t_1)+\int_{t_1}^{s} g\left(u,\frac{c}{2}\right)\Delta u\right)\Delta s$$

当 $t\to\infty$ 时，有

$$\int_{t_1}^{t} f\left(s, y(t_1)+\int_{t_1}^{s} g\left(u,\frac{c}{2}\right)\Delta u\right)\Delta s\le c-x(t_1)<\infty$$

再证充分性，假设(3.1)式和(3.2)式成立，则存在 $t_1\ge t_0$，$L>0$，$K_1>0$，$K_2>0$ 使得 $\int_{t_1}^{\infty} f\left(s, L+\int_{t_1}^{s} g(u,K_1)\Delta u\right)\Delta s<\frac{K_1}{2}$ 和 $\int_{t_0}^{\infty} g(s,K_1)\Delta s<\infty$ 成立，其中 $K_1=K_2$。

设 X 是 $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ 上全体连续有界实值函数构成的，且以最大模为范数 $\|x\|=\sup_{t\ge t_1}|x(t)|$，即 X 为巴拿赫空间。定义 X 的子集 Y 如下：

$$Y=\left\{x(t)\in X: \frac{K_1}{2}\le x(t)\le K_1, t\ge t_1\right\}$$

显然，Y 是 X 的一个非空的有界凸闭子集。定义如下一个算子 $F:Y\to X$，

$$\left(Fx\right)\left(t\right)=K_1-\int_t^\infty f\left(s,L+\int_{t_1}^s g\left(u,x\left(u\right)\right)\Delta u\right)\Delta s$$

接下来，我们将要证明 F 满足引理 2.2 的条件：

1) 先证 F 为自映射算子，

$$K_1\ge\left(Fx\right)\left(t\right)\ge K_1-\int_t^\infty f\left(s,L+\int_{t_1}^s g\left(u,K_1\right)\Delta u\right)\Delta s\ge\frac{K_1}{2}$$

2) 再证 F 在 Y 上连续，取 Y 上的一组函数列 x_n，使得 $x_n\to x$，$x\in Y$ 有

$$\left|\left(Fx_n\right)\left(t\right)-\left(Fx\right)\left(t\right)\right|\le\int_t^\infty\left|f\left(s,L+\int_{t_1}^s g\left(u,x_n\left(u\right)\right)\Delta u\right)-f\left(s,L+\int_{t_1}^s g\left(u,x\left(u\right)\right)\Delta u\right)\right|\Delta s$$

由 f，g 的连续性和 Lebesgue 控制收敛定理可得，当 $n\to\infty$ 时，$Fx_n\to Fx$ 即 F 在 Y 上连续。

3) 最后证明 FY 相对紧致，由于

$$0<\left(Fx\right)^\Delta\left(t\right)\le f\left(t,L+\int_{t_1}^t g\left(u,K_1\right)\Delta u\right)<\infty$$

故 FY 相对紧致。

由引理 2.2 得，存在 $\overline{x}\in Y$ 使得 $\overline{x}=F\overline{x}$，故有

$$\overline{x}\left(t\right)=K_1-\int_t^\infty f\left(s,L+\int_{t_1}^s g\left(u,\overline{x}\left(u\right)\right)\Delta u\right)\Delta s$$

和

$$\overline{x}^\Delta\left(t\right)=f\left(t,L+\int_{t_1}^t g\left(u,\overline{x}\left(u\right)\right)\Delta u\right)$$

令

$$\overline{y}\left(t\right)=L+\int_{t_1}^t g\left(u,\overline{x}\left(u\right)\right)\Delta u$$

当 $t\to\infty$ 时，有 $\overline{x}\left(t\right)\to K_1$，$\overline{y}\left(t\right)\to\beta$，其中 $0<K_1,\beta<\infty$，故 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ 是(1.1)的非振荡，因此 $S_{B,B}^+\ne\varnothing$，证毕。

定理 3.2： $S_{B,\infty}^+\ne\varnothing$ 当且仅当存在 $K_1>0$，$K_2>0$ 使得

$$\int_{t_0}^\infty f\left(s,\int_{t_0}^s g\left(u,K_1\right)\Delta u\right)\Delta s<\infty \tag{3.4}$$

和

$$\int_{t_0}^\infty g\left(s,K_2\right)\Delta s=\infty \tag{3.5}$$

成立。

证明： 先证必要性，假设 $S_{B,\infty}^+\ne\varnothing$ 即存在 $\left(x,y\right)\in S_{B,\infty}^+$，则 x,y 均为终于正的并且单调递增，当 $t\to\infty$ 时，有 $x\to c$，$y\to\infty$，其中 $0<c<\infty$。故存在 $t_1\ge t_0$，使得当 $t\ge t_1$ 时，有 $\frac{c}{2}\le x\left(t\right)\le c$ 成立。对(1.1)的第一个方程从 t_1 到 t 进行积分，得

$$\frac{c}{2}\le x\left(t\right)=x\left(t_1\right)+\int_{t_1}^t f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s\le c$$

当 $t\to\infty$ 时，有

$$\int_{t_1}^{\infty} f\left(s, y(s)\right)\Delta s \le c - x(t_1) < \infty \tag{3.6}$$

由 $g(t,u)$ 关于 u 的单调性和对(1.1)的第二个方程由 t_1 到 t 进行积分，得

$$y(t_1) + \int_{t_1}^{t} g(s,c)\Delta s \ge y(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} g\left(s, x(s)\right)\Delta s$$

当 $t \to \infty$ 时，有

$$\int_{t_1}^{\infty} g(s,c)\Delta s = \infty \tag{3.7}$$

由(3.6)和(3.7)可得

$$\int_{t_1}^{\infty} f\left(s, \int_{t_1}^{s} g\left(u, \frac{c}{2}\right)\Delta u\right)\Delta s \le \int_{t_1}^{\infty} f\left(s, y(s)\right)\Delta s < \infty$$

再证充分性，若(3.4)和(3.5)成立，则存在 $t_1 \ge t_0$，$K_1 > 0$，$K_2 > 0$ 使得 $\int_{t_1}^{\infty} f\left(s, \int_{t_1}^{s} g(u, K_1)\Delta u\right)\Delta s < K$ 和 $\int_{t_0}^{\infty} g(s, K_2)\Delta s = \infty$ 成立，其中 $\frac{K_1}{2} = K_2 = K$。设 X 是 $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ 上全体连续有界实值函数构成的，且以最大模为范数 $\|x\| = \sup\limits_{t \ge t_1}|x(t)|$ 有序的巴拿赫空间。定义 X 的子集 Ω 如下：

$$\Omega = \left\{x(t) \in X : K \le x(t) \le 2K, t \ge t_1\right\}$$

定义如下一个算子 $F : \Omega \to X$，

$$(Fx)(t) = K + \int_{t_1}^{t} f\left(s, \int_{t_1}^{s} g\left(u, x(u)\right)\Delta u\right)\Delta s$$

显然，F 是递增的且对任意 Ω 的子集 ω 都有 $\inf \omega \in \Omega$，$\sup \omega \in \Omega$，因此 $(\Omega, \le)$ 是一个完全格。下证 $F : \Omega \to \Omega$，由于

$$K \le (Fx)(t) \le K + \int_{t_1}^{t} f\left(s, \int_{t_1}^{s} g(u, 2K)\Delta u\right)\Delta s \le 2K$$

故 F 为自映射算子。

由引理 2.3 得，存在 $\bar{x} \in \Omega$ 使得 $\bar{x} = F\bar{x}$，故有

$$\bar{x}(t) = K + \int_{t_1}^{t} f\left(s, \int_{t_1}^{s} g\left(u, \bar{x}(u)\right)\Delta u\right)\Delta s$$

和

$$\bar{x}^{\Delta}(t) = f\left(t, \int_{t_1}^{t} g\left(u, \bar{x}(u)\right)\Delta u\right)$$

令

$$\bar{y}(t) = \int_{t_1}^{t} g\left(u, \bar{x}(u)\right)\Delta u$$

当 $t \to \infty$ 时，有 $\bar{x}(t) \to \alpha$，$\bar{y}(t) \to \infty$，其中 $0 < \alpha < \infty$，故 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是(1.1)的非振荡解，因此 $S_{B,\infty}^{+} \ne \varnothing$，证毕。

定理 3.3： $S_{\infty,B}^{+} \ne \varnothing$ 当且仅当存在 $K_1 > 0$，$K_2 > 0$ 使得

$$\int_{t_0}^{\infty} g\left(s, \int_{t_0}^{s} f(u, K_1)\Delta u\right)\Delta s < \infty$$

和

$$\int_{t_0}^{\infty} f(s, K_2)\Delta s = \infty$$

成立。

证明：该证明与定理 3.2 的证明相似，故省略。

4. 例子

例 4.1：令 $q>1$ 且 $\mathbb{T}:=\{q^n : n\in\mathbb{N}_0\}$，考虑下列系统：

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \dfrac{q+1}{q^2t^3} e_{\frac{ty(t)-t+1}{(q-1)t^2+(2-q)t}}(t,1), \\ y^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{q(2t^2-1)} x(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

首先证明对于任意的 $K>0$ 都有 $\int_1^{\infty} g(t,K)\Delta t<\infty$ 成立，即

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} g(t,K)\Delta t &= \int_1^{\infty} \frac{K}{q(2t^2-1)}\Delta t \\ &= \frac{K}{q}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{2t^2-1}(q-1)t \le \frac{(q-1)K}{q}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{t} \\ &= \frac{(q-1)K}{q}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{q^n} = K<\infty \end{aligned}$$

其次证明 $\int_1^{\infty} f\left(t,\frac{1}{2}+\int_1^t g\left(u,\frac{1}{2}\right)\Delta u\right)\Delta t<\infty$ 成立，即

$$\begin{aligned} &\int_1^{\infty} \frac{q+1}{q^2t^3} f\left(t,\frac{1}{2}+\int_1^t \frac{1}{q(2t^2-1)} g\left(u,\frac{1}{2}\right)\Delta u\right)\Delta t \le \int_1^{\infty}\frac{q+1}{q^2t^3} f(t,1)\Delta t \\ &= \int_1^{\infty}\frac{q+1}{q^2t^3} e_{\frac{1}{t+(q-1)(t-1)t}}(t,1)\Delta t \\ &= \sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{q+1}{q^2t^3} e_{\frac{1}{t+(q-1)(t-1)t}}(t,1)(q-1)t \\ &= \frac{q^2-1}{q^2}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{t^2}\exp\left\{\frac{1}{(q-1)s}\int_1^t \ln\left(1+(q-1)s\right)\frac{\frac{1}{s}}{1+(q-1)(s-1)s}\Delta s\right\} \\ &< \frac{q^2-1}{q^2}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{t^2}\exp\left\{\ln q\int_1^t \frac{1}{(q-1)s}\Delta s\right\} \\ &= \frac{q^2-1}{q^2}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{t^2}\exp\left\{\ln q\sum_{m=0}^{n} 1\right\} \\ &= \frac{q^2-1}{q^2}\sum_{t\in[1,\infty)_{q^{\mathbb{N}_0}}} \frac{1}{t} \\ &= \frac{q^2-1}{q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q^n} = \frac{q+1}{q}<\infty \end{aligned}$$

因此，由定理 3.1 可得 $S_{B,B}^{+} \neq \varnothing$,且 $\left(x(t), y(t)\right)=\left(2-\frac{1}{t^{2}}, 1-\frac{1}{t}\right)$ 为系统(4.1)的非振荡解。

例 4.2： 令 $\mathbb{T}:=\left\{n^{2}: n \in \mathbb{N}\right\}$，考虑下列系统：

$$\left\{\begin{array}{l} x^{\Delta}(t)=\dfrac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]} y(t), \\ y^{\Delta}(t)=e_{\frac{(x(t)-1)\left(t^{2}+1\right)+1}{t^{2}+1+t^{2}(1+2\sqrt{t})}}(t, 1). \end{array}\right. \tag{4.2}$$

首先证明，$\int_{1}^{\infty} g(t, 1) \Delta t=\infty$ 成立，即

$$\begin{aligned} \int_{1}^{\infty} g(t, 1) \Delta t &=\int_{1}^{\infty} \frac{e_{1}(t, 1)}{e_{1-\frac{1}{t^{2}+1}}(t, 1)} \Delta t \\ &=\int_{1}^{\infty} e_{\frac{\frac{1}{t^{2}+1}}{1+(1+2\sqrt{t})\left(1-\frac{1}{t^{2}+1}\right)}}(t, 1) \Delta t \\ &\geq \int_{1}^{\infty} \exp \left\{\int_{1}^{t} \frac{1}{1+2 \sqrt{s}} \ln (1) \Delta s\right\} \Delta t=\infty \end{aligned}$$

其次证明，$\int_{1}^{\infty} f\left(t, \int_{1}^{t} g(u, 1) \Delta u\right) \Delta t<\infty$，即

$$\begin{aligned} & \int_{1}^{\infty} f\left(t, \int_{1}^{t} g(u, 1) \Delta u\right) \Delta t \\ & =\int_{1}^{\infty} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]}\left(\int_{1}^{t} \frac{e_{1}(u, 1)}{e_{1-\frac{1}{u^{2}+1}}(u, 1)} \Delta u\right) \Delta t \\ & =\int_{1}^{\infty} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]}\left(\int_{1}^{t} e_{\frac{1}{u^{2}+1+u^{2}(1+2\sqrt{u})}}(u, 1) \Delta u\right) \Delta t \\ & =\int_{1}^{\infty} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]}\left(\int_{1}^{t} \exp \left\{\int_{1}^{u} \frac{1}{1+2 \sqrt{s}} \ln (2+2 \sqrt{s}) \frac{1}{s^{2}+1+s^{2}(1+2 s)} \Delta s\right\} \Delta u\right) \Delta t \\ & \leq \int_{1}^{\infty} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]}\left(\int_{1}^{t} u \Delta u\right) \Delta t \\ & \leq \int_{1}^{\infty} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{t\left(t^{2}+1\right)\left[(\sqrt{t}+1)^{4}+1\right]} t^{2} \Delta t \\ & \leq \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t(\sqrt{t}+1)^{2}} \frac{t+(\sqrt{t}+1)^{2}}{(\sqrt{t}+1)^{2}} \Delta t \\ & \leq \int_{1}^{\infty} \frac{2}{t \sigma(t)} \Delta t=2<\infty \end{aligned}$$

因此，由定理 3.2 可得 $S_{B,\infty}^{+} \neq \varnothing$，且 $\left(x(t), y(t)\right) = \left(1 - \frac{1}{t^2+1}, t\right)$ 为系统(4.1)的非振荡解。

参考文献

[1] Li, W.T. (2002) Classification Schemes for Positive Solutions of Nonlinear Differential Systems. *Mathematical and Computer Modeling*, **36**, 411-418. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(02)00172-3

[2] Öztürk, Ö. (2017) On the Existence of Nonoscillatory Solutions of Three-Dimensional Time Scale Systems. *Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 2617-2628. https://doi.org/10.1007/s11784-017-0454-9

[3] Zhu, Z. and Wang, Q. (2007) Existence of Nonoscillatory Solutions to Neutral Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **335**, 751-762. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.02.008

[4] Öztürk, Ö. (2018) On Oscillatory Behavior of Two-Dimensional Time Scale Systems. *Advances in Difference Equations*, **2018**, 18. https://doi.org/10.1186/s13662-018-1475-4

[5] Öztürk, Ö. and Akın, E. (2016) On Nonoscillatory Solutions of Two Dimensional Nonlinear Delay Dynamical Systems. *Opuscula Mathematica*, **36**, 651-669. https://doi.org/10.7494/OpMath.2016.36.5.651

[6] Öztürk, Ö. and Akın, E. (2016) Nonoscillation Criteria for Two-Dimensional Time-Scale Systems. *Nonautonomous Dynamical Systems*, **3**, 1-13. https://doi.org/10.1515/msds-2016-0001

[7] Öztürk, Ö. and Akın, E. (2016) Classification of Nonoscillatory Solutions of Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales. *Dynamic Systems and Applications*, **25**, 219-236.

[8] Bohner, M. and Peterson, A. (2001) Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1

[9] Zeidler, E. (1986) Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I: Fixed Point Theorems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4838-5

[10] Knaster, B. (1928) Un théorème sur les fonctions d'ensembles. *Annales Societatis Polonici Mathmatici*, **6**, 133-134.