Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 319-325
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144139

# 李代数上复结构的形变问题的研究

## ——关于形变等式的研究

**张时铭，唐清艳**

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2024年3月8日；录用日期：2024年3月27日；发布日期：2024年4月28日

## 摘　要

在这篇文章中，我们将考虑李代数上的复结构的形变，主要是与复流形的情况作类比，我们期待会有一些新的现象出现。此外，预期目标：为李代数上复结构的形变建立一个完整的理论，并期望在这个理论的基础上，进一步加深关于李代数上复结构的形变与复流形的形变之间联系的理解。我们引入Banach不动点定理(压缩映像原理)作为新方法解决了李代数上的形变问题，并给出相关结论的新证明，这一证明极大地简化了Kodaira-Spencer的工作，更给了我们在做形变问题时的新视角。

## 关键词

形变，李代数上的复结构，Banach不动点定理

# Research on Deformation of Complex Structures on Lie Algebras

## —Research on Deformation Equations

**Shiming Zhang, Qingyan Tang**

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Mar. 27th, 2024; published: Apr. 28th, 2024

## Abstract

**In this paper, we will consider the deformation of complex structures on Lie algebras, mainly by analogy with the case of complex manifolds. We expect some new phenomena to emerge. In addition, the expected goal is to establish a complete theory of the deformation of complex structures on Lie algebras, and to further deepen the understanding of the relation between the deformation**

文章引用: 张时铭, 唐清艳. 李代数上复结构的形变问题的研究[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 319-325.
DOI: 10.12677/pm.2024.144139

of complex structures on Lie algebras and the deformation of complex manifolds on the basis of this theory. We introduce Banach fixed point theorem (compressed image principle) as a new method to solve the deformation problem on complex manifold, and give a new proof of related conclusions, which greatly simplifies Kodaira-Spencer's work, and gives us a new perspective on deformation problems.

## Keywords

**Deformation, Complex Structures on Lie Algebras, Banach Fixed Point Theorem**



## 1. 引言

在复几何中，Kodaira-Spencer 形变理论占据了一个核心地位，它深入研究了复结构如何在复流形家族中发生变化。这一理论不仅为我们提供了理解复流形模空间的新视角，还为复几何中的许多问题提供了有力的工具。在复几何中，复流形是一个核心概念，它描述了一种具有复结构的流形。而模空间，则是一个参数化所有具有某种特定性质的复流形的空间。研究模空间，就是研究这些复流形如何随参数变化而变化。Kodaira-Spencer 变形理论正是为了研究这一问题而诞生的。Kodaira-Spencer 变形理论的核心在于研究复结构在复流形家族上的变化。这里，复流形家族指的是一个参数化的复流形集合，其中每个流形都对应一个参数值。通过这一理论，我们可以了解当参数发生变化时，复结构是如何随之变化的。具体来说，Kodaira-Spencer 变形理论定义了一个称为 Kodaira-Spencer 映射的映射，它将切向量空间映射到复流形的二阶外尔上同调群。这个映射为我们提供了复结构变化的精确描述，使我们能够量化地分析复结构的变化。Kodaira-Spencer 形变理论在复几何中有着广泛的应用。首先，它为我们提供了一种研究复流形模空间的有效方法。通过这一理论，我们可以更好地理解模空间的几何结构和性质。其次，Kodaira-Spencer 形变理论还为研究复几何中的其他问题提供了有力工具。例如，在代数几何中，它可以帮助我们研究代数曲线的模空间，从而深入了解代数曲线的性质和分类。

幂零流形 $\Gamma\backslash G$ 上左不变的复结构等价于 $G$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构，正是这个原因，幂零复流形的上的信息很大程度上是由李代数 $\mathfrak{g}$ 决定的。这个事实启发我们研究有限维李代数上的复结构及其形变。关于维数小于或等于 6 的李代数上的复结构已有很多分类结果。但是，关于李代数上的复结构的形变方面研究目前还很少，所以，有必要对李代数上的复结构的形变问题做一个比较系统的研究，这将有助于我们对幂零复流形上复结构形变的理解。

本文给出了幂零李代数上复结构形变理论的某些全局结果。首先，利用霍奇理论和 Banach 不动点定理，提出了一种简单的求解复结构变化的障碍方程的方法，从而对 Kodaira-Spencer 和 Kuranishi 的局部形变理论提供了更简单的处理方法。该方法具有一定的全局性，也适用于各种形变理论中更一般的 Maurer-Cartan 方程。

## 2. 预备知识

**定义 1 [1]**：(**李群**)：一个李群是一个 $C^\infty$ 流形 $G$，$G$ 也是一个群，使得 $\mu: G\times G\to G$，$(a,b)\mapsto ab$ 和 $\tau: G\to G$，$a\mapsto a^{-1}$，其中 $\mu,\tau$ 是光滑的。

**定义 2 [1]：(李代数)**：李群上所有左不变向量场的集合称为李代数，且与李群在单位元处的切空间同构。将 $T_eG$ 记为 $\mathfrak{g}$。

**定义 3 [2]：**一个李代数被称为是幂零的，如果存在滤链 $\cdots \subseteq a_n \subseteq a_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq a_1 \subseteq a_0 = \mathfrak{g}$，$[\mathfrak{g}, a_i] \subseteq a_{i+1}$，使得 $n$ 充分大时，$a_n = 0$。

**定义 4 [3]：**若 $\varphi \in A^{0,1}\left(M, T^{1,0}M\right)$，在距 $M$ 有限距离的近复结构的集合与所有 $\varphi \in A^{0,1}\left(M, T^{1,0}M\right)$ 的集合之间存在双射对应关系，使得 $p \in X$ 的每个点上映射 $\varphi\overline{\varphi} : T^{1,0}M \to T^{1,0}M$ 无特征值 1，则称 $\varphi$ 是一个 Beltrami 微分。

**定义 5 [3]:**若一个 Beltrami 微分 $\varphi$ 满足 Maurer-Cartan 方程：$\overline{\partial}\varphi = \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]$，则称 $\varphi$ 为一个可积性 Beltrami 微分。

**引理 6 [4]：**Hodge 理论意味着存在 Green 算子 $G$ 和调和投影 $\mathbb{H}$ 在 Laplacians 算子 $\square_{\overline{\partial}}$ 对应的 Hodge 分解中且有下面等式：$\square_{\overline{\partial}} G = G \square_{\overline{\partial}} = I - \mathbb{H}$，$\overline{\partial} G = G \overline{\partial}$，$\overline{\partial}^* G = G \overline{\partial}^*$，$\mathbb{H} G = G \mathbb{H} = 0$。此外还有：$\overline{\partial}\mathbb{H} = \mathbb{H}\overline{\partial} = 0$，$\overline{\partial}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\overline{\partial}^* = 0$。

## 3. 李代数上复结构的形变

### 3.1. 带有复结构的李代数

令 $\mathfrak{g}$ 为一个 $2n$ 维的实李代数，在 $\mathfrak{g}$ 上的一个近复结构由一个同态 $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 所定义，且 $J^2 = -1$。如果近复结构 $J$ 满足：

$$[JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{1.1}$$

或者满足：

$$\left[\mathfrak{g}^{1,0}, \mathfrak{g}^{1,0}\right] \subseteq \mathfrak{g}^{1,0}, \tag{1.2}$$

则称近复结构 $J$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个复结构。$\mathfrak{g}^{1,0}$ 是在复化李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ $\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}\right)$ 上的复结构 $J$ 的 $\sqrt{-1}$ 特征空间，这样的一对带有复结构的李代数被记为 $(\mathfrak{g}, J)$。在 $\mathfrak{g}$ 上有两个复结构 $J_0$ 和 $J_1$，如果存在一个李代数同构 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 使得 $fJ_0 = J_1 f$，则两结构 $J_0$ 和 $J_1$ 等价。在外代数 $\Lambda\mathfrak{g}^* = \oplus_k \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ 上，存在 Chevalley–Eilenberg complex。可以参考文献[5]

$$\left(\Lambda\mathfrak{g}^*, d\right) : 0 \to \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \Lambda^2\mathfrak{g}^* \to \cdots \to \Lambda^{2n-1}\mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \Lambda^{2n}\mathfrak{g}^* \to 0 \tag{1.3}$$

微分定义为：$d\omega(x, y) := -\omega[x, y], \forall \omega \in \mathfrak{g}^*, x, y \in \mathfrak{g}$ . $\mathfrak{g}$ 上的复结构 $J$ 导致了一个分解：$d = \partial + \overline{\partial}$，使得 $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$。

### 3.2. Banach 不动点定理

**定理 1 [6] (Banach 不动点定理)：**$(E, \|\bullet\|)$ 为一个 Banach 空间，$F$ 为 $E$ 的一个闭子集，若有一压缩映射 $f : F \to F$，则存在一个唯一的解 $x \in F$，使得 $f(x) = x$。

**定理 2：**令 $(E, \|\bullet\|)$ 为一个 Banach 空间，且假设 $F$ 为 $E$ 的闭子集，给出 $y \in F$，令 $k$ 为 $F$ 上的一个压缩映射，即对 $\forall x_1, x_2 \in F$，有 $\|k(x_1) - k(x_2)\| \le \Upsilon \|x_1 - x_2\|, \Upsilon \in (0,1)$。若 $y + k(x) \in F$ 对 $\forall x \in F$，则存在唯一的 $x \in F$，使得 $x = K_y(x) = y + K(x)$。

证明：事实上，如果我们定义 $F$ 上的算子 $K_y$：$K_y(x) = y + K(x)$ 对任意 $x \in F$。则 $\|K_y(x_1) - K_y(x_2)\| = \|(y + K(x_1)) - (y + K(x_2))\| = \|K(x_1) - K(x_2)\| \le \Upsilon \|x_1 - x_2\|$，$K_y(x) \in F$。即 $K_y(x)$ 是一个压缩映射，因此由定理 1 可得证存在唯一的 $x \in F$ 使得 $x = K_y(x) = y + K(x)$。

**命题 1**：$(E,\|.\|)$ 为一个 Banach 空间，$F$ 为 $E$ 的一个闭子集，$x_1\in F$ 定义序列 $\{x_n\}_{n\ge1}\in F$，记 $x_1=y$ 且 $x_n=y+K(y+K(y+\cdots))$，$x_{n+1}=y+K(x_n)$ 对任意 $n\ge1$，则存在 $x\in F$ 使得 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$。

$B$ 为单位圆盘 $\Delta_{\varepsilon_k}=\{t=(t_1,\cdots,t_N)\in\mathbb{C}^N\mid|t|=|t_1|+\cdots+|t_N|<\varepsilon_k\}$ 的解析子集，且 $\Delta_{\varepsilon_k}\subseteq\mathbb{C}^N$，$0\in B$，$(\mathfrak{g},J)$ 为带有复结构的李代数，在 $B$ 上 $(\mathfrak{g},J)$ 的全纯形变意味着族 $\phi(t)\in\Lambda^{0,1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}(t\in B)$ 使得：

1) $\phi(t)$ 在 $t$ 处是全纯的且 $\phi(0)=0$；

2) $\bar\partial\phi(t)=\frac{1}{2}[\phi(t),\phi(t)],\forall t\in B$。

定义算子 $\bar\partial:\Lambda^{p,\cdot}\to\Lambda^{p,\cdot+1}$，且 $\bar\partial$ 算子能被扩展为：

$$\bar\partial:\Lambda^{0,\cdot}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\Lambda^{0,\cdot+1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0},\tag{1.4}$$

$\{z_\alpha\}$ 为 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 的一组基底且 $\varphi=\varphi^\alpha\otimes z_\alpha\in\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$，

$$\bar\partial\varphi:=\bar\partial\varphi^\alpha\otimes z_\alpha+(-1)^q\varphi^\alpha\wedge\bar\partial z_\alpha\tag{1.5}$$

对于足够小的 $t$，每一个 $\phi(t)$ 决定在 $\mathfrak{g}$ 上的一个复结构 $J_t$。

在带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M:=(\Gamma/G,J)$，其中 $G$ 是一个实李群，$\Gamma\subset G$ 为 $G$ 的离散子群，$J$ 为 $G$ 上的一个左不变复结构，记 $\mathfrak{g}$ 为 $G$ 的李代数。对给定任意的 Beltrami differential $\psi\in A^{0,1}(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G))$，对 Maurer-cartan 方程 $\bar\partial\psi=\frac{1}{2}[\psi,\psi]$ 的两边同时作用算子 $\bar\partial^*G$，得到：

$\psi=\mathbb{H}\psi+\bar\partial\bar\partial^*G\psi+\frac{1}{2}\bar\partial^*G[\psi,\psi]$，令 $\eta=\mathbb{H}\psi$，$\xi=\bar\partial^*G\psi$，$K(\psi)=\frac{1}{2}\bar\partial^*G[\psi,\psi]$。得到：

$$\psi=\eta+\bar\partial\xi+K(\psi)\tag{1.6}$$

由于李代数上复结构的小形变与紧商空间形式 $\Gamma/G$ 的带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M:=(\Gamma/G,J)$ 的复结构小形变是等同的。且李群 $G$ 上的复结构诱导了在紧商空间 $\Gamma/G$ 上的复结构，李群 $G$ 上的左不变复结构也诱导了 $G$ 上李代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构，仍然记为 $J$。我们可以参考文献[5] [7]。

### 3.3. 形变等式

引入霍尔德范数有以下不等式：$\|\bar\partial^*G[\varphi,\psi]\|_k\le C_k\|\varphi\|_k\|\psi\|_k$，$\forall\varphi,\psi\in A^{0,1}(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G))$，$C_k$ 为一常数与 $\varphi,\psi$ 无关，其中 $\Gamma/G$ 为一紧商空间，记赋范空间 $(A^{0,1}(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G)),\|.\|_k)=E$，$E$ 的完备化为一 Banach 空间。令 $\delta_k=\frac{1}{2C_k}$，我们定义 $F$ 为 $E$ 的一个闭子集：$F=\{\varphi\in E\mid\|\varphi\|_k\le\delta_k\}$。给定一个 $\eta\in\mathbb{H}^1(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G))$，我们引进算子 $K$：$K(\varphi)=\frac{1}{2}\bar\partial^*G[\varphi,\varphi]$，有以下定理：

**定理 3**：如果算子 $K$ 满足 $\|K(\varphi)-K(\psi)\|\le\Upsilon\|\varphi-\psi\|$，$\Upsilon\in(0,1)$。其中 $K(\varphi),K(\psi)\in F$，对任意的 $\varphi,\psi\in F$，$F$ 为 $E$ 的闭子集，则算子 $K$ 满足 Banach 不动点定理。。

证明：令 $\varphi,\psi\in F\subset E$，有估计 $\|\bar\partial^*G[\varphi,\psi]\|_k\le C_k\|\varphi\|_k\|\psi\|_k$

$$\begin{aligned}\|K(\varphi)-K(\psi)\|_k&=\left\|\frac{1}{2}\bar\partial^*G[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar\partial^*G[\psi,\psi]\right\|_k=\frac{1}{2}\|\bar\partial^*G([\varphi+\psi,\varphi-\psi])\|_k\\&\le\frac{1}{2}C_k\|\varphi+\psi\|_k\|\varphi-\psi\|_k\le\frac{1}{2}C_k(\|\varphi\|_k+\|\psi\|_k)\|\varphi-\psi\|_k\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{2\delta_k}2\delta_k\|\varphi-\psi\|_k=\frac{1}{2}\|\varphi-\psi\|_k\end{aligned}$$

而 $K(\varphi)=\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]$，

$$\|K(\varphi)\|_{k}=\left\|\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]\right\|_{k}\le\frac{1}{2}C_{k}\|\varphi\|_{k}\|\varphi\|_{k}\le\frac{1}{2}\frac{1}{2\delta_{k}}\delta_{k}^{2}=\frac{\delta_{k}}{4}\le\delta_{k}$$

$$K(\varphi)=\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]\in F$$

所以满足 Banach 不动点定理条件：即有唯一的 $\varphi\in F$ 使得 $\varphi=\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]$。

**定理 4**：若 $\|K_{\eta}(\varphi)-K_{\eta}(\psi)\|\le\gamma\|\varphi-\psi\|$，$\gamma\in(0,1)$，对任意的则 $\varphi,\psi\in F$，$\eta\in\mathbb{H}^{1}\left(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G)\right)$ 算子 $K_{\eta}(\varphi)\in F$ 且满足 $\|\eta\|_{k}\le\frac{\delta_{k}}{2}$，$K_{\eta}(\varphi)=\eta+\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]$，且 $K_{\eta}(\varphi)$ 满足 Banach 不动点定理，即存在唯一解 $\varphi\in F$ 使得 $K_{\eta}(\varphi)=\varphi$。

证明：

$$\begin{aligned}\|K_{\eta}(\varphi)-K_{\eta}(\psi)\|_{k}&=\left\|\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\psi,\psi]\right\|_{k}=\frac{1}{2}\left\|\bar{\partial}^{*}G([\varphi+\psi,\varphi-\psi])\right\|_{k}\\&\le\frac{1}{2}C_{k}\|\varphi+\psi\|_{k}\|\varphi-\psi\|_{k}\le\frac{1}{2}C_{k}\left(\|\varphi\|_{k}+\|\psi\|_{k}\right)\|\varphi-\psi\|_{k}\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{2\delta_{k}}2\delta_{k}\|\varphi-\psi\|_{k}=\frac{1}{2}\|\varphi-\psi\|_{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|K_{\eta}(\varphi)\|_{k}&=\left\|\eta+\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]\right\|_{k}\le\|\eta\|_{k}+\frac{1}{2}\left\|\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]\right\|_{k}\\&\le\frac{\delta_{k}}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2\delta_{k}}\delta_{k}^{2}=\frac{3}{4}\delta_{k}\le\delta_{k}.\end{aligned}$$

所以 $K_{\eta}(\varphi)\in F\subset E$，对任意 $\varphi\in A^{0,1}\left(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G)\right)$ 则由定理二可证得：存在唯一的 $\varphi\in F$，有 $K_{\eta}(\varphi)=\varphi$。

我们之前由 Maurer-Cartan 方程推导出 Kuranishi 形式 $\psi=\eta+\bar{\partial}\xi+\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\psi,\psi]$。其中 $\eta=\mathbb{H}\psi$ 且 $\xi=\bar{\partial}^{*}G\psi\in A^{0,0}\left(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G)\right)$，我们的方法适用于给出这些方程的解，只要 $\|\eta+\bar{\partial}\xi\|_{k}\le\frac{\delta_{k}}{2}$。接下来我们考虑这个问题，当这个解 $\varphi$ 给出 Maurer-Cartan 方程的解时，我们在这里提供了一个证明：

**推论 1**：令 $\varphi\in F$ 为 Kuranishi 等式 $\psi=\eta+\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\psi,\psi]$ 的解，若 $\mathbb{H}^{0,2}[\varphi,\varphi]=0$ 则 $\varphi$ 给出 Maurer-Cartan 方程的光滑解且 $\bar{\partial}^{*}\varphi=0$。

证明：令 $\Phi=\bar{\partial}\varphi-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$，需证 $\Phi=0$，因为 $\varphi=\eta+\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]$，且 $\eta\in\mathbb{H}^{1}\left(\mathfrak{g}^{1,0}\right)$。

所以

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\varphi&=\frac{1}{2}\bar{\partial}\bar{\partial}^{*}G[\varphi,\varphi]=\frac{1}{2}\left(\square_{\bar{\partial}}-\bar{\partial}^{*}\bar{\partial}\right)G[\varphi,\varphi]\\&=\frac{1}{2}\square_{\bar{\partial}}G[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{I}-\mathbb{H}^{0,2}\right)[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]\\&=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^{*}\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]\end{aligned}$$

所以$\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]+\Phi=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]$

$$\Phi=-\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]=-\bar{\partial}^*G\left[\bar{\partial}\varphi,\varphi\right]=-\bar{\partial}^*G\left[\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]+\Phi,\varphi\right]$$

$$=-\bar{\partial}^*G\left([\Phi,\varphi]+\frac{1}{2}\left[[\varphi,\varphi],\varphi\right]\right)=-\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]$$

$$\|\Phi\|_k=\left\|-\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]\right\|_k=\left\|\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]\right\|_k$$

$$\|\Phi\|_k\le C_k\|\Phi\|_k\|\varphi\|_k\le\frac{1}{2\delta_k}\|\Phi\|_k\delta_k=\frac{\|\Phi\|_k}{2}$$

$\Phi=0$，即$\bar{\partial}\varphi=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$。

再证$\varphi$是光滑的：$\varphi$满足椭圆方程：

$$\square_{\bar{\partial}}\varphi=\frac{1}{2}\square_{\bar{\partial}}\bar{\partial}^*G[\varphi,\varphi]=\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\square_{\bar{\partial}}G[\varphi,\varphi]$$

$$=\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\left(\mathrm{I}-\mathbb{H}^{0,2}\right)[\varphi,\varphi]=\frac{1}{2}\bar{\partial}^*[\varphi,\varphi].$$

椭圆方程的标准正则性理论表明，在带有左不变复结构的紧复幂零流形$M:=(\Gamma/G,J)$上的解$\varphi$是光滑的。

不难看出，上述论证证明了如果$\mathbb{H}^{0,2}[\varphi,\varphi]=0$，方程$\psi=\eta+\bar{\partial}\xi+\frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\psi,\psi]$的解也是相应的Maurer-Cartan方程的解。我们将其总结为以下命题。

**推论2:** 令$\varphi\in F$为Kuranishi型等式$\psi=\eta+\bar{\partial}\xi+\frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\psi,\psi]$的解，若$\mathbb{H}^{0,2}[\varphi,\varphi]=0$，则$\varphi$给出Maurer-Cartan方程的光滑解。

证明：令$\Phi=\bar{\partial}\varphi-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$，需证$\Phi=0$，又$\varphi=\eta+\bar{\partial}\xi+\frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\varphi,\varphi]$，且$\eta\in\mathbb{H}^1\left(\Gamma/G,T^{1,0}(\Gamma/G)\right)$

所以

$$\bar{\partial}\varphi=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]$$

所以

$$\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]+\Phi=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]-\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]$$

$$\Phi=-\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\varphi,\varphi]=-\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]$$

则

$$\|\Phi\|_k=\left\|-\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]\right\|_k=\left\|\bar{\partial}^*G[\Phi,\varphi]\right\|_k$$

$$\|\Phi\|_k\le C_k\|\Phi\|_k\|\varphi\|_k\le\frac{1}{2\delta_k}\|\Phi\|_k\delta_k=\frac{\|\Phi\|_k}{2}$$

所以$\Phi=0$，即$\bar{\partial}\varphi=\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$

再证 $\varphi$ 是光滑的：$\varphi$ 满足椭圆方程：

$$\begin{aligned}\square_{\bar\partial}\varphi &= \frac{1}{2}\square_{\bar\partial}\bar\partial^* G[\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\bar\partial^*\square_{\bar\partial} G[\varphi,\varphi]\\ &= \frac{1}{2}\bar\partial^*\left(\mathrm{I}-\mathbb{H}^{0,2}\right)[\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\bar\partial^*[\varphi,\varphi]\end{aligned}$$

椭圆方程的标准正则性理论表明，在带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M := (\Gamma/G, J)$ 上的解 $\varphi$ 是光滑的。

由于李代数上复结构的小形变与紧商空间形式 $\Gamma/G$ 的带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M := (\Gamma/G, J)$ 的复结构小形变是等同的。所以由我们的推论 1 和推论 2 可得结论：

## 4. 结论

**结论 1：** 令 $\phi(t) \in \Lambda^{0,1} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$ 为 Kuranish 等式 $\psi = \eta + \frac{1}{2}\bar\partial^* G[\psi,\psi]$ 的解，若 $\mathbb{H}^{0,2}\left[\varphi(t),\varphi(t)\right] = 0$，则 $\phi$ 给出 Maurer-Cartan 方程 $\bar\partial\phi = \frac{1}{2}[\phi,\phi]$ 的光滑解。

**结论 2：** 令 $\phi(t) \in \Lambda^{0,1} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$ 为 Kuranishi 型等式 $\psi = \eta + \bar\partial\xi + \frac{1}{2}\bar\partial^* G[\psi,\psi]$ 的解，若 $\mathbb{H}^{0,2}\left[\varphi(t),\varphi(t)\right] = 0$，则 $\varphi$ 给出 Maurer-Cartan 方程 $\bar\partial\phi = \frac{1}{2}[\phi,\phi]$ 的光滑解。

## 5. 总结

本文给出了在李代数上的复结构形变理论的某些全局结果。首先，利用霍奇理论和 Banach 不动点定理，提出了一种简单的求解复结构变化的障碍方程的方法，又因为李群 $G$ 上的复结构诱导了在紧商空间 $\Gamma/G$ 上的复结构，李群 $G$ 上的左不变复结构也诱导了 $G$ 上李代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构，仍然记为 $J$。这样一来，李代数上复结构的小形变与紧商空间形式 $\Gamma/G$ 的带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M := (\Gamma/G, J)$ 的复结构小形变是等同的。这加深了我们对幂零李代数复结构形变的理解，从而对形变等式的相关命题有了新的证明即推论 1 和推论 2。如此一来我们得到了结论 1 和结论 2。我们对 Kodaira-Spencer 和 Kuranishi 的局部形变理论提供了更简单的处理方法，具有一定的全局性，且将带有左不变复结构的紧复幂零流形 $M := (\Gamma/G, J)$ 上形变等式的结论过渡到李群 $G$ 的李代数上。该方法也适用于各种形变理论中更一般的 Maurer-Cartan 方程。在这个理论的基础上，进一步加深关于李代数上复结构的形变与紧复幂零流形上复结构的形变之间联系的理解。

## 参考文献

[1] Tu, L.W. (2011) An Introduction to Manifolds. 2nd Edition, Springer, New York, 164-187.

[2] Hall, B.C. (2007) Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. Springer, Cham, 53-55.

[3] Liu, K. and Zhu, S. (2018) Global Methods of Solving Equations on Manifolds. *Surveys in Differential Geometry*, **23**, 241-276. https://doi.org/10.4310/SDG.2018.v23.n1.a6

[4] Morrow, J. and Kodaira, K. (2006) Complex Manifolds. Holt, Rinehart and Winston, Providence, 147-185. https://doi.org/10.1090/chel/355

[5] Xia, W. (2021) Deformations of Dolbeault Cohomology Classes for Lie Algebra with Complex Structures. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **60**, 709-734.

[6] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 38-43.

[7] Cordero, L.A., Fernandez, M. and Ugarte, G.L. (2000) Compact Nilmanifolds with Nilpotent Complex Structures: Dolbeault Cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**, 5405-5433. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02486-7